대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 30 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 30, No. 2, 353 ~ 374. May 2020
DOI: https://doi.org/10.29275/jerm.2020.05.30.2.353

스프레드시트 환경에서 근사 분수와 직선의 기울기를 이용한 무리수의 대안적 지도법

유 재 근* · 이 정 아**† · 박 문 환*** · 장 혜 원****
*홍천중학교 교사, **용인풍덕고등학교 교사, ***춘천교육대학교 교수, ****서울교육대학교 교수

Alternative Method of Irrational Numbers Using Approximate Fractions and Slopes of Straight Lines in a Spreadsheet Environment

Yoo, Jae-Geun* · Yi, Jung-A† · Park, Moon Hwan*** · Chang, Hyewon******
* *Teacher, Hongcheon middle school, South Korea,* kuki122@chol.com
***Teacher, Pungduck high school, South Korea,* cantatamath@hanmail.net
****Professor, Chuncheon National University of Education, South Korea,* pmhwan@cnue.ac.kr
*****Professor, Seoul National University of Education, South Korea,* hwchang@snue.ac.kr

초록. 본 연구는 학교수학의 무리수 교수학습에서 무리수의 비분수표현과 비순환소수표현 사이의 유기적 연결 방안을 탐색하고 현장 적용 가능성을 살펴보고자 하였다. 무리수 개념 이해의 핵심을 수렴성의 직관적 인식과 비순환성의 추론이라 보고 수학적 분석을 통해 유한소수열과 근사분수열이 학습내용이 되어야 함을 확인하였다. 이에 학습자와 학습 환경을 고려하여 공학 도구를 적용하였으며 공학 도구가 학습자의 수학 활동을 보조하고 견인하는 수학적 도구가 되는 과정을 분석하였다. 그 결과 제곱근의 유한소수열을 구하는 활동에서 학생들은 함수식과 계산식 입력, 드래그와 반복기능 사용 등으로부터 제곱근 기호의 이해와 대상으로서의 제곱근에 초점을 두어 유의미하게 이해하였다. 그리고 '직선 $y=\sqrt{2}x$는 격자점을 지날 수 있을까?' 라는 과제 해결을 위해 학생들은 근사분수를 직선의 기울기로 표상한 것을 관찰하여 무리수의 소수표현에서의 비순환성을 추론할 수 있었다. 따라서 본 연구는 실수의 완비성 공리에 대한 심상을 구성하도록 하는 무리수 교수학습의 기초 연구가 될 것으로 기대된다.

핵심어: 무리수, 분수 표현, 도구 발생, 교수실험, 직선의 기울기, 스프레드시트 환경

ABSTRACT. The purpose of this study was to explore the possibility of interconnection between non-fractional representation and non-circular decimal representation in irrational teaching and learning of school mathematics and to examine the possibility of field application. First, through the analysis of previous studies, it was found that the core of understanding irrational concepts is the intuitive perception of convergence and the inference of acyclicity. And through mathematical analysis, we confirmed that finite decimal sequences and approximate fractional sequences should be learning contents. In this regard, we applied engineering tools in teaching and learning activity of irrational numbers and analyzed the process by which engineering tools become learners' mathematical tools and then learning occurs, that is, instrument genesis. As a result, in the activity of finding finite fractions of square roots, students gained a meaningful understanding by focusing on the meaning of square root symbols and square roots as objects from inputting functions and operations and using drag. And in the activity to solve the task 'Can a graph cross a grid point?', Students could infer the acyclicity of the decimal representation of irrational numbers by observing the approximate fraction as the slope. Thus, this study is expected to be a basic reference of teaching and learning of irrational numbers to construct a mental image of real numbers completeness axiom.

KEY WORDS: irrational number, fractional representation, instrumental genesis, teaching experiment, slopes of straight lines, a spreadsheet environment

† corresponding author
Received: Apr 10, 2020 / Reviewed: May 15, 2020 / Accepted: May 15, 2020

Ⅰ. 서론

역사적으로 무리수는 받아들이기 매우 어려운 개념이었다. 고대 피타고라스 학파는 기하학적으로 정사각형의 대각선이 무리수 개념과 관련된다는 사실을 인식하였으나, 이를 수로 받아들이지는 못하였다. 수학자들은 수 천 년에 걸쳐 무리수 개념과 고군분투하였으며, 무리수를 수로 인정하기 시작한 것은 19세기 이후부터이다.

학교수학에서 무리수는 그 수학적 의미를 직관적으로 드러내어 다루기 어려운 개념이다(우정호, 2017, p. 284). 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 표현되므로 수치적으로 명확히 파악하기 어렵지만, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이와 같은 기하학적 표현에 의해 무리수의 존재성을 인식할 수 있다.

특히 2015 개정 교육과정에서는 피타고라스 정리를 학습하고 난 후에 제곱근과 무리수를 다루고 있기 때문에, 피타고라스 정리를 사용한 선분의 작도가 가능해졌다. 따라서 단위 정사각형의 대각선에 의해 $\sqrt{2}$를, 한 변의 길이가 1이고 다른 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 직사각형의 대각선에 의해 $\sqrt{3}$을 구할 수 있고, 유사한 방식에 의해 $\sqrt{n}$을 구하여 수직선 위에 나타내 보도록 할 수 있다. 또한 기하학적 상황을 통해 무리수의 존재성을 제시하고 이를 수직선에 대응시킴으로써 수직선은 유리수만으로 채워질 수 없음을 설명하는 것이 가능하다.

2015 개정 수학과 교육과정에서도 “한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용하여 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 할 수 있다.” 고 서술한다. 교육과정에서 언급한 ‘직관’은 무리수에 대응되는 ‘기하학적 대상’을 의미하는 것으로 해석된다.

그러나 여러 선행연구들은 무리수 개념의 학습 지도가 어려움을 지적했으며 이를 극복하고자 시도하였다. 예를 들어, 무리수 개념 학습을 ‘표현’과 관련시킨 연구(이지현, 2014; 최은아, 강향임, 2016; 오국환, 박정숙, 권오남, 2017), ‘연결성’으로 접근하여 분석한 연구(이지현, 2015; 박선용, 2016) 등이 있다.

‘표현’과 관련하여, 교과서(장경윤 외, 2020)에서는 무리수를 ‘순환하지 않는 무한소수’라고 정의하고 있다. 그러나 “순환하지 않는다.”, ‘무한소수’라는 표현과 ‘무리수’라는 용어 사이의 관련성을 개념적으로 이해하는데 충분하지 않다. 유리수는 연속량의 측정 또는 분할이라는 맥락이 있으나 무리수는 실생활과의 관련성이 적기 때문에 교과서의 도입 맥락도 형식적이고 추상적으로 다루어지게 된다. 무리수의 형식적 정의 외에도 다양한 의미와 그 표현으로 분수, 소수, 기호, 기하, 수직선, 함수 표현이 존재하며, 예비교사들의 경우 비(非)분수 표현에 내포된 통약불가능성을 잘 알지 못함을 확인하였다(최은아, 강향임, 2016). 실수 체계의 연속성을 ‘수직선’ 표현으로 설명하고 있으나(오국환 외, 2017) 유리수의 조밀성에도 불구하고 유리수 사이에 공백(즉, 무리수)이 존재한다는 사실을 직관적으로 받아들이기는 쉽지 않다. 따라서 직관적인 교수학적 조치는 이러한 문제점을 해소할 수 있다.

‘연결성’과 관련하여, 이지현(2014)은 $\sqrt{2}$를 $1.41421356237\cdots$와 같이 표현하는 것은 무한소수임을 투명하게 보여주기에, $\sqrt{2}$의 소수표현은 “무한소수로 나타난다.” 는 것을 직관적으로 보여주는 좋은 표상이라고 하였다. 그런데 $\sqrt{2}$의 소수표현만으로는 “순환하지 않는다.”는 것을 투명하게 드러내지는 못하므로, $\sqrt{2}$가 “순환하지 않는다.”는 것을 인식하게 하는 방안을 구안할

필요가 있다.

무리수의 개념을 이해하기 위해서는 '무리수의 존재'에 대한 기하학적 직관과 더불어 "순환하지 않는다."와 "무한소수로 나타난다."는 무리수의 핵심적인 두 가지 특징을 직관적으로 받아들일 수 있는 대상이나 표상의 제시도 필요하다고 판단된다.

이러한 관점을 반영하기 위해 본 연구에서는 분수를 직선의 기울기로 표현하였다. 학생들은 원점을 지나는 직선을 대상으로 유리수의 기울기들의 변화를 관찰하여 무리수의 기울기를 추론하도록 하였다. 이에 무리수를 기울기로 갖는 직선이 격자점을 지날 수 없다는 추측을 유도하고자 교수실험을 설계하였다. 직선 $y=\sqrt{2}\,x$ 위에 격자점이 없다는 것은 격자점의 좌표를 등식에 대입하는 것으로 확인할 수 있지만 이는 완비성의 공리를 가정하게 된다.[1] 따라서 먼저 $\sqrt{2}$로 수렴하는 유리수열(유한소수가 아닌)을 구성하고, 이를 바탕으로 직선 $y=\sqrt{2}\,x$는 격자점을 지나지 않는다는 것을 기하학적으로 추론하도록 하는 조치가 필요하다.

$\sqrt{2}$로 근사하는 유리수열을 구성하는 과정은 반복적이면서 복잡한 계산 절차이므로, 공학 도구의 활용을 고려할 수 있다. 특히 교육공학의 활용은 6차 교육과정부터 강조되기 시작하였으며, 2015 개정 교육과정에서도 '정보처리 역량'을 위해 수학 교수학습에 공학 도구를 적극 활용하도록 권장하고 있다.

대안적인 지도법은 무리수를 분수로 표현할 수 없다는 직관적인 심상을 심어주기 위한 것이다. 이를 위해 무리수에 대한 선행연구를 분석하고, 무리수로 수렴하는 유리수열을 구성하는 방안에 대해 논의하고자 한다. 이를 토대로 공학 도구를 활용한 수업지도안을 설계한 후, 실제 수업에 적용한 결과 및 효과를 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 무리수에 대한 선행연구 분석

무리수에 관한 많은 연구가 이루어졌다. 학생이나 예비교사들의 무리수에 대한 이해를 분석한 연구(박윤희, 박달원, 정인철, 2004; 이선비, 2013; 강향임, 최은아, 2017), 무리수의 본질을 통약불가능성으로 보고 이를 다룰 것을 제안한 연구(김부윤, 정영우, 2008; 변희현, 박선용, 2002) 등이 있으나 그 지도에 관한 구체성을 띈 연구는 다소 적은 편이다.

이영란과 이경화(2006)는 Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례 연구를 하였다. 격자용지 위의 제곱수가 아닌 수를 넓이로 갖는 정사각형의 한 변의 길이를 구하는 문제 상황에서 유리수에 대한 반성적 사고를 통해 무리수의 존재성과 학습 필요성을 인식하고 종이자를 사용한 측정과 계산기를 활용한 탐구활동을 통해 학습자가 무리수 개념을 발전적으로 이해하도록 의도하였다. 그러나 학습자는 무리수 $\sqrt{2}$의 근사유한소수에 대한 탐구활동만으로는 무리수의 소수표현의 특성을 간파할 수 없었다. 또한 격자용지를 이용하지 못한 학생들도 있었다. 이는 제공한 교수 도구가 항상 수학적 이해에 이르게 하는 도구로 이용되는 것은 아니라는 것을 의미한다. 특히 비순환성(즉,

1) 격자점을 지나지 않는다는 의미는 x에 어떤 자연수 값을 대입하더라도 y는 자연수가 아님을 말한다. 다시 말해, 처음부터 $\sqrt{2}$가 무리수임을 인정하는 것이며 완비성의 공리를 가정하는 것이 된다.

분수 꼴로 표현할 수 없음)을 학생들이 인식할 수 있는지를 확인하지 않았으므로, 이를 보완하기 위해 분수로 표현할 수 없다는 의미를 드러낼 수 있도록 분수 표현과 관련시키는 교수학적 조치를 마련해야 한다.

강정기(2016)는 무리수 개념 학습의 어려움을 표기의 관점에서 분석하고, 이를 극복할 수 있는 지도방안을 제시하였다. 제곱근을 사용한 무리수 표기에는 제곱근 기호와 수가 병기되어 기호와 수 맥락의 혼용에 따른 인식론적 장애가 발생할 수 있으므로 제곱근이 정확한 소수 표현을 할 수 없는 것과 더불어 제곱하여 제곱근 안의 수가 되는 것을 나타낸 표기임을 다루는 것을 포함하여 총 6단계에 걸친 지도를 제안하였다. 그러나 정사각형의 넓이와 한 변의 길이 사이의 관계로부터 무리수를 감지하는 1단계 다음에, 유리수를 분수로 다루는 교육과정과 일관되도록 무리수의 통약불가능을 파악한 후에는 무리수의 비분수, 비순환소수 특성에 대한 이해가 자연스럽게 될 거라고 예측하였다. 또한 제곱하면 2가 되는 특성을 담은 표기로 R 2 (Radix 2), l 2(latus 2), $\sqrt{\ }2$ 라는 역사적 사용을 참조하여 기호와 수 맥락의 균형적인 사용을 위해 $a(2)$를 제안하였다. 그러나 이에 대한 구체적인 지도 방안을 제시하지는 않았다.

오국환 외(2017)는 교과서의 무리수 단원을 과정과 대상의 관점에서 분석하였다. 무리수의 과정적 측면은 순환하지 않는 무한소수를, 대상적 측면은 수직선 위의 고정된 한 점, 실수의 연산에서 제곱근 기호가 있는 수의 예, 여러 표상 사이의 유연한 이동이라고 하였다. 교과서에서는 유한소수와 부등식을 반복 사용하여 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임이 알려져 있다고 제시되어 있으며, 학습자의 무리수 이해에 대한 설문지 응답에서 무한소수에 대한 언급이 빈번하다는 근거를 들어 교과서가 과정으로서의 무리수를 유의미하게 다루고 있다고 하였다. 그리고 교과서는 학생들의 무리수 인식을 '과정'의 관점으로 유도하는 데는 성공적이지만, '대상'으로서 인식시키는 데에는 제한점을 갖고 있다고 하였다. 그러나 과정과 대상은 일방향이 아닌 상호작용하므로 대상으로서 빈약한 인식의 원인을 대상으로서의 지도뿐만 아니라 무리수의 과정적 측면의 지도에서도 재고할 필요가 있다.

학교수학에서는 무리수 개념을 설명하기 위해 이들 방법들 중에서 '축소 구간 정리'를 활용한 것으로 해석된다. 즉, 학교수학에서 무리수의 간단한 예로 $\sqrt{2}$를 제시하고, $\sqrt{2}$의 근삿값을

$$1<\sqrt{2}<2,\ 1.4<\sqrt{2}<1.5,\ 1.41<\sqrt{2}<1.42,\ \cdots$$

와 같이 구하는 과정은 '축소 구간 정리'와 관련되며, 대부분의 현행 중학교 교과서에서 채택하는 방식이다. 또한 김서령 외(2013, p.19)는 "실제로 $\sqrt{2}$를 소수로 나타내면 (…중략…) 순환하지 않는 무한소수가 됨이 알려져 있다. 유리수를 소수로 나타내면 유한소수나 순환소수가 되는데, (…중략…) 유리수가 아닌 수, 즉 어떤 수를 소수로 나타냈을 때 순환하지 않는 무한소수가 되는 수를 **무리수**라고 한다."라고 기술하고 있다.

그런데 엄밀하게 말하면, $\sqrt{2}$의 근삿값을 구하는 과정은 '축소 구간 정리'를 적용한 것이라고 볼 수 없다. 왜냐하면, '축소 구간 정리'는 유계인 폐구간을 가정해야 하는데 구간 (1, 2), (1.4, 1.5), (1.41, 1.42) 등은 폐구간이 아니기 때문이다. 여기서 폐구간 조건이 삭제되었을 때, 모든 구간에 속하는 원소의 존재성에 문제점이 발생한다. 예를 들어, $\cap_{n\in N}(1-\frac{1}{n},1)=\varnothing$ 라는 사실에서 존재성은 부정될 수도 있기 때문이

다. 하지만 중학교 교과서에서의 접근 방식이 고등 수학의 교수학적 변환 과정에서 어쩔 수 없이 발생하는 '교수학적 공백'2)이라고 이해될 수도 있다. 따라서 $\sqrt{2}$ 로 수렴하는 수열의 집합 $\{1,\ 1.4,\ 1.41,\ \cdots\}$ 은 위로 유계이기 때문에 상한이 존재한다는 완비성의 공리를 암묵적으로 가정하고 있다고 해석할 수 있다. 즉, 현행 교과서 전개는 $\sqrt{2}$ 의 크기(즉, 수렴성)를 이해하는데 도움이 되기에 충분히 교육적 가치가 있다고 판단된다.3) 다만, $\sqrt{2}$ 의 무한소수 표현에서 순환하지 않는 무한소수(즉, 비순환성)가 된다는 사실을 직관하기는 어렵다는 한계를 갖는다.

이상의 선행연구들은 학습자가 기존 수체계인 유리수만으로 표현할 수 없는 수의 존재에 대한 인식과 사고를 통해 무리수의 비순환 무한소수 특성을 충실히 이해할 것이라고 기대하였다. 그러나 기존 수체계에 대한 반성적 사고를 유도하는 지도방안의 구체화가 요구된다.

2. 무리수의 수학적 분석

피타고라스학파는 모든 수를 비로 표현할 수 있다고 믿었다. 따라서 정사각형의 대각선의 길이는 자연수의 비로 표현될 수 없다는 사실을 발견했음에도 불구하고, 무리수 $\sqrt{2}$ 의 존재 가능성을 받아들이지 못하였다. 이러한 현상이 발생하게 된 배경에는 그리스 수학에서 모든 수를 비(ratio)로 바라보려는 태도도 있지만, 보다 근본적으로는 소수로 표현하는 방법을 갖지 못한 것도 포함될 것이다.

실수의 중요한 성질로 '조밀성'과 '완비성'을 들 수 있다. 이것의 이해를 위해 분수 표현을 활용한다면 조밀성은 쉽게 이해할 수 있겠지만, 완비성은 그렇지 못할 수 있다. 이는 완비성의 이해는 수렴하는 수열에 의해 구성 가능한데 분수 표현만으로는 수렴성을 드러내기가 어렵기 때문이다. 예를 들어, 원주율 π 의 근삿값을 분수로 $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$, $\cdots$ 과 같이 표현할 수 있지만, 역으로 분수열 $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$, $\cdots$ 으로부터 이 수열의 수렴성을 쉽게 파악할 수는 없다. 마찬가지로, 분수열 $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\cdots$으로부터 이 수열이 $\sqrt{2}$ 로 수렴한다는 것을 간파하기는 어렵다.

그러나 분수로 나타낸 수를 소수로 표현한다면 각 수열의 수렴성을 쉽게 파악할 수 있다. 소수표현은 소수점 이하의 숫자의 관찰을 유도함으로써 수의 변화를 직관할 수 있게 하기 때문이다. 이는 소수 표현이 등장하면서부터 무리수의 존재성이 이해되기 시작했다는 것에서도 살펴볼 수 있다.

Klein(1924, pp. 32-33)은 "소수표현의 도입을 바탕으로, 16세기 말에 무리수에 대한 일반적인 아이디어가 처음으로 나타나기 시작하였다. 유리수를 소수로 변환한다면, 유한소수 또는 무한소수로 표현되며 그 결과는 항상 순환소수가 될 것이다. 이제 비순환소수를 만드는 규칙이 무엇인지는 모르더라도 비순환소수를 생각하는 것을 막을 수는 없으며, 누구든 그것을 명확하게 유리

2) '교수학적 공백'이란, Gonzalez-Martin, Giraldo, Souto(2013)에 의하면, 학교 수학의 교수학적 변환으로 인해 실수 개념의 어려움을 간과하거나 혹은 우회하게 되는 것을 의미한다.

3) $I_1=[1,2]$, $I_2=[1.4,1.5]$, $I_3=[1.41,1.42]$, $\cdots$ 등으로 정의하면 $l(I_n)\to 0$ 이므로 $\cap_{n\in N} I_n$ 은 한 점이 됨을 직관적으로 받아들일 수 있다.

수가 아닌 수로 직관하게 된다.”라고 하였다.

그의 설명은 현행 학교 수학에서의 무리수 도입 과정이라 해도 지나치지 않다. 하지만 관련 선행연구에서 살펴보았듯이 학생들의 무리수 학습의 어려움은 여전하다. 이는 $\sqrt{2}$ 의 근삿값의 표현 방식에 따른 불투명성과 투명성에 기인한 것일 수 있다. 예를 들어, $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 소수로 표현한다면 1, 1,4, 1,41, 1,414와 같이 표현될 수 있으며, 이때 무리수의 수렴성 측면은 투명하게 나타날 수 있지만 비순환성은 불투명하다. 한편, $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 분수로 표현한다면 $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\cdots$ 과 같이 표현될 수도 있으며, 이때 수렴성은 불투명하게 나타나지만 유리수의 본질적 정의인 ‘두 정수의 비’를 고려할 가능성을 제공하므로 무리수의 비순환성을 투명하게 보여주기 위한 방안이 될 수 있다.

비순환성은 무리수 개념의 핵심이며, 완비성 공리의 바탕이 된다. 무리수를 이해하기 위해서는 수렴하는 유리수열의 구성과 함께 유리수열에 의한 극한이 비순환소수가 될 수 있다는 사실을 받아들일 수 있어야 한다.

변희현(2005)에 의하면 오늘날 우리가 실수라 부르고 무한소수로 표현하는 것은 Stevin의 소수 정의에 기원한 것이다. 이와 같은 실수에 관한 이해는 단지 직관에 의한 것이지 엄밀하게 정의된 개념은 아니다. 물리적인 문맥에서 수가 사용되기 시작했을 때, 기하학적인 직관에 기초하지 않은 새로운 수 이론의 확립이 필요하게 되었다. 19세기에 Weierstrass, Dedekind, Cantor 등[4]은 실수 체계를 산술화하여 이 문제를 해결하였다. 실수 체계의 산술화는 기하의 도움 없이 자연수와 그 연산 등의 산술에 기초함을 뜻한다. 실수 체계의 산술화는 실수 체계에 기초한 해석학에서 기하학적 직관을 제거할 수 있게 한다는 점에서 매우 중요하다(변희현, 2005, pp. 29-30). 하지만 무리수 개념을 산술화하는 과정에서 기하학적 직관이 제거된 것을 학교 수학에 반영한 것이 무리수 개념의 학습을 어렵게 하는 요인으로 작용할 가능성을 간과할 수 없다.

이상으로부터 무리수 개념의 심상은 분수와 소수 개념의 통합으로 구성되는 것이며, 학교 수학의 교수학습에 기하학적 직관을 다루는 것이 필요함을 알 수 있다.

현재 학교 수학에서는 $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 소수로 표현하며, “$\sqrt{2}$ 를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 됨이 알려져 있다.”와 같이 설명하고 있다.

$\sqrt{2}$ 의 근삿값은 $1^2 < 2 < 2^2$, $1.4^2 < 2 < 1.5^2$, $1.41^2 < 2 < 1.42^2$, $\cdots$ 과 같은 방식으로부터 구할 수 있다. 이는 소수 표현에 의해 수렴하는 수열을 구성하는 방식이다. 따라서 소수를 이용하여 $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 구하는 방법을 학교 수학에서 채택한 것은 자연스러운 현상이다.

그러나 소수표현만으로는 비순환성을 직관하기는 어려우며, $\sqrt{2}$ 의 비순환성에 대한 기하학적 직관을 위해 근사분수 표현이 고려될 필요가 있다. $\sqrt{2}$ 의 근사 분수를 구성하는 방법은 다양하다. 예를 들어, 교과서에서와 같이 유한소수열을 이용하는 방법, 연분수를 이용하는 방법, 유

4) Klein(1924, p. 33)은 “19세기 후반에 보다 정밀한 산술적 형식화에 의해 무리수의 기초를 세우려는 요구가 있었으며, 1872년에 Cantor와 Dedekind에 의해 독립적으로 (무리수에 대한) 일반적인 기초가 세워졌다.”고 한다. 순서체인 실수의 ‘완비성’ 개념이 명확히 설명된 것은 19세기 후반에 이르러서이며, 완비성 공리가 ‘단조 수렴 정리’, ‘축소 구간 정리’, ‘Heine-Borel 정리’, ‘극한점 성질’, ‘Bolzano- Weierstrass 정리’, ‘Cauchy 성질’, ‘Dedekind 절단’ 등과 서로 동치임이 밝혀지게 되었다.

클리드 알고리즘을 이용하는 방법 등을 생각해 볼 수 있다. 그런데 유한소수열에 의한 근사 방법으로는 비순환성과 관련시키기 어려우며, 연분수는 학교수학의 범위를 벗어난다. 따라서 유클리드 알고리즘을 이용하는 것이 현실적으로 무난한 방법이라고 판단된다.

유클리드 알고리즘은 다음과 같다.

$a_0 = q_1 a_1 + a_2 \ (0 \le a_2 < a_1)$

$a_1 = q_2 a_2 + a_3 \ (0 \le a_3 < a_2)$

$a_2 = q_3 a_3 + a_4 \ (0 \le a_4 < a_3)$

$a_3 = q_4 a_4 + a_5 \ (0 \le a_5 < a_4)$

이를 $\sqrt{2}$ 에 적용하여 계산하면 다음과 같다.

$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2} - 1)$ …… ①

$1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$ …… ②

$\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 + (-7 + 5\sqrt{2})$ …… ③

$3 - 2\sqrt{2} = 2 \cdot (-7 + 5\sqrt{2}) + (17 - 12\sqrt{2})$ … ④

②에서 근사식 $(\sqrt{2} - 1) \approx \frac{1}{2}$을 구하고, 이를 ①에 대입하여 $\sqrt{2}$ 의 근삿값 $\frac{3}{2}$ 을 얻을 수 있다. 또한 ③으로부터 근사식 $(\sqrt{2} - 1)^2 \approx \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$을 구하고, 이를 ①, ②에 적용하여 $\sqrt{2}$ 의 근삿값 $\frac{7}{5}$ 을 얻을 수 있다.

유사하게 유클리드 알고리즘을 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$ 의 근사분수를 구하면 $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, …이며, 각각의 근사분수의 분자와 분모는 서로소이다. 각 분수의 분모는 증가하므로 각 직선이 최초로 만나는 격자점의 x-좌표도 증가한다. 그리고 $\frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$ 이 성립하기 때문에 근사분수를 기울기로 하는 직선은 진동하면서 격자점을 지나지 않는 직선(즉, $y = \sqrt{2}\,x$)으로 수렴하게 된다. 이상을 바탕으로 교수학습과정에서 $\sqrt{2}$ 가 비순환소수임이 설명될 수 있다. $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, … 는 $\sqrt{2}$ 로 수렴하는 분수 수열의 한 가지 예이다. 이 분수들을 기울기로 하는 직선의 방정식을 생각해 보자.

직선 $y = \frac{3}{2}x$, $y = \frac{7}{5}x$, $y = \frac{17}{12}x$, $y = \frac{41}{29}x$, … 에서 각 직선의 기울기의 분자와 분모는 서로소이기 때문에 각각의 직선이 최초로 지나는 격자점은 (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), …이다. 여기서 기울기의 분모는 증가하므로 각 직선이 최초로 만나는 격자점의 x-좌표도 증가한다. 이를 바탕으로 좌표평면에 직선을 그린 후 시각적으로 변화를 관찰하여 직선 $y = \sqrt{2}x$ 의 위치를 추론할 수 있을 것이다. 이로부터 직선 $y = \sqrt{2}x$ 가 격자점과 만나지 않음을 알 수 있다. 즉, $\sqrt{2}$ 는 분수로 나타낼 수 없는 수로 소수표현에서의 비순환성을 떠올릴 수 있을 것이다.

3. 도구 발생

수학교육에서 공학 도구 활용은 지필을 대신하는 소극적인 사용에서부터 지필을 능가하는 기능의 적극적인 이용까지 다양할 수 있다. 이를 통해 학교수학의 교수학습에 변화가 있을 수 있다. 예를 들어, 수학자가 지필환경에서 다룬 전문가 수준의 내용을 학습자는 공학 환경에서 다룸으로써 개념의 풍부한 이해를 할 수도 있을 것이다.

이 절에서는 수학 교수학습에의 공학 도구의 의의를 ‘도구 발생(instrumental genesis)’으로 설명하는 선행연구를 분석한다. 이를 바탕으로 무리수 개념의 이해를 위한 참조를 스프레드시트로 구현하고 그 분석틀을 마련하고자 한다.

관련 선행연구들은 연장(tool), 인공물(artefact)을 도구(instrument)의 개념과 비교하면서 도구

(instrument)가 되는 공학 도구의 역할을 강조하였다(Trouche, 2005; 2018; 김부윤, 이지성, 2008; 한세호, 장경윤, 2009 등).

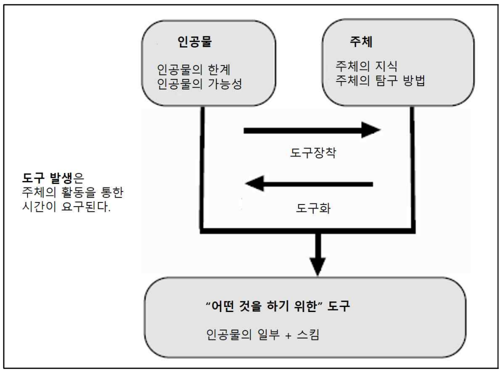


***Figure* 1.** Instrumental genesis of Trouche(2005: 144)

Figure 1의 첫 번째 방향의 ‘도구화’는 연장/인공물(tool/artifact)이 교사/학생의 교수 의도에 적합하게 가공됨으로써 교구의 특성을 갖게 되는 과정으로 볼 수 있다. 더불어 두 번째 방향의 ‘도구장착’은 이러한 교구를 통해 활동한 학습자가 주어진 과제의 해결에 이르는 수학적 이해와 통찰을 갖게 되는 과정으로 간주할 수 있다.

Trouche(2005)는 도구 발생에 대해 사용 스킴(Usage Scheme)과 도구화된 활동 스킴(Instrumented Action Scheme, 이하 IAS)의 복합체이며 주체와 연장/인공물 사이의 두 방향에서 이루어지는 과정으로 정의한다. 도구 발생의 첫 번째 방향은 주체에서 인공물을 향하는 것으로, 점진적으로 인공물에 잠재되어 있는 것(potentialities)을 선별하여 결국 특정한 용도로 변형함으로써 사용 스킴이 구축되는 과정을 ‘도구화(instrumentalization)’라고 하였다. 그리고 두 번째 방향을 인공물에서 주체로 향하는 것으로 보고 주어진 과제에 효과적으로 응답하도록 테크닉을 점진적으로 구성함으로써 도구화된 활동 스킴을 개발 또는 점유하는 과정을 ‘도구장착(instrumentation)’이라고 하였다.

한세호와 장경윤(2009)은 Drijvers & Gravemeijer (2005)의 연구를 기초로 도구 발생 관련 요소 및 과제 해결 활동에서의 도구 발생 과정을 분석하고, 고등학교 수학 문제해결에 CAS(Computer Algebra Systems)가 사용되는 것을 도구 발생으로 분석하였다. CAS에 기반한 교수학습 활동에서 교사는 ‘수학적으로 의미 있으나 잘 드러나지 않던’ 중요한 주제를 다룰 수 있는 기회(p.543)를 의식하게 되었다. 또한 학생들은 아직 지필해법을 학습하지 않은 무리방정식의 풀이를 그래프로 구하고, 구한 해의 의미를 이해할 수 있게 되었다. 이를 통해 도구화된 CAS에 기반한 문제해결활동이 교육과정의 제시 순서에 영향을 줄 수 있음을 밝혔다(p. 542). 한편 연장 또는 인공물을 사용자가 도구화하는 과정이 학습자에게 자연스러운 것은 아니며 도구화된 CAS를 비계로 활용하게 하는 적절한 과제를 개발하여 제공할 필요가 있다고 하였다.

Loborde & StraBer(2010)는 지난 25년간 ICME 프로시딩과 2개의 ICMI의 논문들에서 수학 교수에서의 테크놀로지 사용과 관련된 이론적 틀, 이슈, 제언들을 분석하여 학생들의 수학적 향상을 위해 새로운 도구들이 교수법에 보충되어야 한다(p. 121)는 것에는 이견이 없음을 확인하는 한편 도구 발생 분석에 대한 보다 많은 연구를 제안하였다.

도구 발생 분석에서 도구화와 도구장착의 메커니즘, 사용 스킴과 IAS의 관계는 유기적으로 연결되어 있다. 도구화와 도구장착은 도구 발생 과정에 일어나는 메커니즘을 의미한다. 도구화(instrumentalize)는 악기로 비유하면 악기가 아니었던 재료(non-instrument materials)를 재구성해서

악기로 활용하는 것(instrumentalize)으로 해석된다. 도구장착(instrumentate)은 악기 사용법을 알고 추구하는 음악 연주에 맞게 악기 편성을 할 수 있는 것으로 해석된다. 이를 수학 과제로 다시 설명하면, 도구화는 학생들이 교사의 안내에 따라 기능을 익히는 것이다. 이에 따라 학생들은 모두 동일한 도구를 가지게 되지만 학생 개인마다 도구화로 수행하는 정도가 다를 수 있다. CAS 경우에 어떤 학생은 방정식의 근을 근사해로만 구할 수 있고 어떤 학생은 제곱근 기호로 표현 할 수도 있다. 도구장착은 익숙함에서 능숙함으로 가는 단계이며 자유자재로 과제 해결에 적합한 도구를 사용하는 것이다.

IAS는 도구를 다루는 테크닉 외에도 개념적인 특징을 지닌다. IAS는 사용 스킴과 명확하게 구획화되는 것은 아니다. 예를 들어, 사용 스킴은 음수를 도입하면서 기존의 뺄셈과 다른 마이너스 부호를 인식하는 것이다. 초보자부터 도구 기능을 익히면서 사용 스킴이 형성된다. 사용 스킴은 관찰자 수준에 머무는 반면에, IAS는 사용자 수준의 과제로 받아들여진다. 사용 스킴은 도구의 본래 기능(스프레드시트는 계산프로그램)의 숙달이고 IAS는 도구를 과제에 맞게 (스프레드시트 함수식, 계산식 등을) 찾아서 사용할 수 있고 그러한 도구 이용으로부터 발생되는 학습의 성장과정이 도구 발생인 것이다. 따라서 사용 스킴 안에 IAS가 포함되며, 도구 기능을 숙달하더라도 사용 스킴에 그칠 수 있고, 도구 발생이 잘 이루어졌을 때 비로소 IAS에 통합되는 것으로 해석된다.

이상의 연구들은 테크놀로지가 물리적 실재와 형식적인 수학적 모델 사이의 매개적 단계(intermediate level)를 제공하여 학생들이 더 나은 이해를 구성하도록 도울 수 있다(Loborde, C. & StraBer, R., 2010, p. 124)고 한다. 그리고 학교 수학 내용에 대한 도구 발생의 구체적인 모습을 보여주는 연구가 필요함을 알 수 있다. 따라서 학습자의 수학적 활동을 지지하기 위해서는 우선은 낯선 테크놀로지가 한계가 아닌 가능성으로 작용하도록 해야 한다. 이를 이해 과제 해결의 디딤돌로써 교수학적 의도를 스프레드시트로 구현한 도구를 교수학습활동에 이용할 수 있다. 이로부터 도구 발생이 일어나는 과정을 분석하여 교수학습의 어려움을 다루는 방안을 모색할 필요가 있다.

III. 연구 방법

본 연구의 목적은 무리수 개념의 존재가능성을 직관하는 과제를 개발하여 그 과제의 현장 적용가능성을 탐색하는 것이다. 이 장에서는 이에 대한 연구방법을 제시한다.

1. 과제 개발

연구자는 전문가 2명, 현장 교사 1명과 함께 협력하여 과제를 개발하였다. 수직선에서 정사각형의 대각선을 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$를 작도하고 이를 실수에 대응시키는 방법은 소수 표현에서의 비순환성을 투명하게 제시하지 못한다. 무리수 $\sqrt{2}$의 비순환성은 소수 표현만으로는 확인할 수 없다. 결국 완비성을 가정하여 실수를 정의한다면 ‘실수는 유리수와 무리수의 합집합’이라는 사실에서 출발하게 되며, 무리수를 ‘유리수가 아닌 실수’로 정의하게 됨으로써 순환적인 정의에 빠지게 된다.

따라서 유리수의 집합이 완비성을 만족하지 않는다는 사실을 직관할 수 있어야 하며, 유리수

열에 의해 근사시킬 수 있는 유리수가 아닌 어떤 수의 존재 가능성을 기하 외에 수치적으로도 인식할 필요가 있다.

수학적 분석을 통해 무리수 개념의 존재가능성은 근사분수를 좌표평면에 표현함으로써 시각화할 수 있음을 설명하였다. 따라서 본 연구에서는 좌표평면에서 직선의 기울기를 이용한 추론 과제를 개발하여 $\sqrt{2}$ 의 비순환성을 직관적으로 인식하는 심상을 구성하고자 하였다.

변희현(2005)에 의하면 1, 1.2, 1.23, ⋯ 의 수렴성을 어려워한다. 특히 점 수렴과 관련하여 $0.999\cdots=1$을 받아들이기 어려우므로, 점으로 수렴하기보다는 선으로 수렴하는 것이 더 직관적일 것이라고 판단된다. 이에 격자점과 기울기를 이용하였으며, 지필 계산이 어려우므로 공학도구를 활용하였다.

본 연구의 최종 목표는 “직선 $y=\sqrt{2}x$ 는 격자점과 만날까?”라는 질문에 대해 학생들이 올바르게 대답할 수 있는지를 확인하는 것이다. 본 연구의 실험을 위해 피타고라스 정리는 학습하였지만, 무리수 개념은 학습하지 않은 중학교 2학년 학생 중에서 수학 학업성취도가 높은 학생을 선발하여 예비실험을 실시하였다.

무리수 개념을 설명하는 과정에서 여러 가지 근삿값을 구해야하기에 스프레드시트를 활용하여 수업을 설계하였다. 본 연구에서는 무리수의 핵심개념을 수렴성과 비순환성으로 추출하였으며, 무리수 개념의 이해를 위해서는 무리수의 근삿값에 대한 소수표현과 분수표현이 모두 필요하다고 판단하여, *Table* 1과 같이 정리하였다.

예비실험에서는 먼저 제곱근 기호의 의미를 설명하고 $\sqrt{2}$ 의 근사소수인 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ⋯ 등을 스프레드시트를 활용하여 구하는 과제를 제시하였으며, 교사의 도움을 받아 학생은 이 과제를 큰 어려움 없이 해결할 수 있었다. 또한 관련된 과제로 $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ⋯, $\sqrt{10}$ 의 근사소수를 구하는 것도 큰 어려움 없이 스스로 수행하였으며, 이를 통해 근사소수의 수렴성을 이해하는 것으로 확인되었다.

***Table* 1.** Core concepts of irrational numbers

무리수의 핵심 개념	
소수표현	근사소수 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ⋯ 의 수렴성의 직관적 인식
분수표현	근사분수 좌표평면의 격자점으로부터 비순환성의 추론

다음으로 무리수를 근사분수로 표현하는 과제를 제시하였다. 유클리드 호제법은 반복적인 재귀적 표현으로 이루어지지만 복잡하여, 지필계산에는 한계가 있다. 스프레드시트를 이용하여 사칙계산에 따른 점화식을 찾아보도록 하였으며, 근사분수를 구해보도록 하였다. 학생들에게 익숙한 무리수인 원주율 π에 대해 반복적인 관계식을 구하는 과제는 교사의 도움을 받아 어렵지 않게 수행하였으며, 관련된 과제인 $\sqrt{2}$ 의 재귀적 표현을 독자적으로 수행할 수 있었다.

그러나 π와 $\sqrt{2}$ 의 근사분수를 구하는 과제는 교사의 설명에도 불구하고 어려움을 겪는 것으로 확인되었다. 이에 황금비(ϕ)에 대해 재귀적 표현과 근사분수를 구하는 과제를 제시하였고, 황금비의 근사분수를 구하는 과제를 교사의 도움을 받아 성공적으로 수행할 수 있었다. 이를 바탕으로 후속과제인 $\sqrt{2}$ 의 근사분수를 구하는 과제를 독자적으로 수행할 수 있었다.

예비실험 결과 근사분수를 구하는 과제는 황금비(ϕ), $\sqrt{2}$ 의 순서로 진행하는 것이 적절하다고 판단하였으며, 원주율 π에 대해서는 개별적

으로 수행하는 심화과제로 제공하였다.

황금비(ϕ) ➜ $\sqrt{2}$ ➜ π(선택: 심화)

무리수 $\sqrt{2}$가 비순환소수임을 시각적으로 이해하기 위해서는 근사분수를 기울기로 하는 직선을 좌표평면에 표시할 수 있어야 한다. 직선의 방정식은 중학교 2학년에서 다루어진 내용이기에 이 부분에 대한 예비실험은 생략하였다.

이러한 예비실험 결과를 토대로 수정, 보완하여 개발한 과제의 수업 개요는 *Table* 2와 같다.

Table 2는 총 2차시 분량(1-2차시)의 사전프로그램과 총 3차시 분량(3-5차시)의 본 프로그램으로 구성되며 차시당 90분씩 배정하였다. 1-2차시 수업은 주로 스프레드시트의 기능 및 제곱근에 대한 기초 개념을 익히는 단계이므로 본 연구에서는 분석의 대상에서 제외하였으며, 3-5차시 수업의 결과만을 분석의 대상으로 하고자 한다.

***Table* 2.** Overview of tasks using technology tools

단계	차시	성취 목표	내용
공학 도구와 친해지기	1	의도에 따라 공학 도구를 사용할 수 있다.	▪ 제곱근의 의미 이해하기 ▷정사각형의 넓이와 길이 사이의 관계 탐구 ▪ 공학 도구의 기능 익히기 ▷드래그와 함수식을 이용한 반복 계산 기능
	2		▪ 유리수의 재귀적 표현 ▷지필 환경 ▷공학 환경 ▷두 결과를 비교하기
공학 도구의 사용	3	공학 도구를 이용한 무리수의 재귀적 표현을 이해할 수 있다.	▪ 무리수의 소수 표현 ▷제곱근의 근사소수 구하기 ▷π의 근사소수 구하기 ▪ 무리수의 재귀적 표현 ▷π, $\sqrt{2}$, 황금비(ϕ) ▪ 황금비(ϕ)의 근사분수 구하기 ▷황금비(ϕ)의 근사소수 검색 ▷황금비(ϕ)의 재귀적 표현을 이용한 근사분수 구하기 ▷두 결과를 비교하기
무리수 성질의 추론	4	재귀적 표현에서 근사분수를 구하고 수렴성을 해석할 수 있다.	▪ $\sqrt{2}$의 근사분수 구하기 ▷황금비(ϕ)에 대한 전차시의 학습 내용 복습 ▷$\sqrt{2}$의 재귀적 표현을 이용한 근사분수 구하기 ▷근사분수를 소수로 표현하기 ▷근사소수와 $\sqrt{2}$의 오차 구하기 ▪ π의 근사분수 구하기(선택: 심화 학습) ▷π의 근사분수 검색 ▷π의 재귀적 표현을 이용한 근사분수 구하기 ▷두 결과를 비교하기
	5	근사분수를 격자점으로 표현하여 기울기의 변화를 추론하고 무리수의 비순환성을 해석할 수 있다.	▪ 근사분수를 직선의 기울기로 해석하여 좌표평면 위에 표현하기 ▪ 무리수의 비순환성을 기울기로 추론하기 ▪ 무리수를 정의하기 ▷소수 표현 ▷분수 표현

사전 프로그램(1-2차시)을 통해 학생들은 공학 도구의 기능을 익히면서 도구화되는 시간을 갖게 된다. 또한, 제곱근의 기호 및 기본적인 의미를 학습하는 단계이기도 한다.

본 프로그램(3-5차시)은 세부적으로 공학 도구의 사용 스킴을 구성하는 단계(3차시)와 도구화된 활동 스킴(IAS)을 구성하여 무리수 성질을 추론하는 단계(4-5차시)를 거쳐, 공학이 유용한 도구(instrument)로 발전하는 과정을 확인하도록 설계하였다. 여기서는 본 차시를 중심으로 살펴보고자 한다. *Table* 3은 3차시 활동을 위해 개발한 활동지 내용이다.

***Table* 3.** 3rd lesson (90 minutes) Student Activity Materials

주제	무리수를 반복적인 관계식으로 표현하기
준비물	스프레드시트의 컴퓨터 환경
활동	내용
활동1	(학생별로 공학 도구를 제공하고, 무리수의 근사소수를 구한다.) [탐구 1] 무리수의 소수 표현 ▹제곱근의 근사소수 구하기 ▹π의 근사소수 구하기 [탐구 2] 무리수의 재귀적 표현 ▹π, $\sqrt{2}$, 황금비(ϕ)
활동2	[탐구 3] 황금비(ϕ)의 근사분수 구하기 ▹황금비(ϕ)의 근사소수 검색 ▹황금비(ϕ)의 재귀적 표현을 이용한 근사분수 구하기 ▹황금비(ϕ)의 근사분수의 수렴성 추론 [탐구 4] (심화선택과제) 황금비(ϕ)의 근사분수의 성질 탐구 ▹피보나치수열 탐구

활동1 [탐구 1]에서 함수식 SQRT을 이용하여 1부터 10까지의 제곱근의 근삿값을 구하고, 함수식 PI()를 이용하여 원주율의 근삿값을 구한다. 활동1 [탐구 2]는 스프레드시트의 계산결과를 해석하여 무리수를 반복적인 관계식으로 표현한다.

활동2에서는 재귀적 표현을 토대로 황금비의 근사분수를 찾는다. 활동2 [탐구 4]는 학생들의 학습 수준에 따라 선택적으로 적용하기 위해 심화선택과제로 제시하였다.

3차시에서는 스프레드시트에 나타난 결과를 근사분수로 변환하고 해석하는 능력에 초점을 맞추고자 하였다.

Table 4는 4차시 활동을 위해 개발한 활동지 내용이다.

***Table* 4.** 4th lesson (90 minutes) Student Activity Materials

주제	무리수의 재귀적 표현에서 근사분수 구하기
준비물	스프레드시트의 컴퓨터 환경
활동	내용
활동3	(학생별 공학 도구를 제공하고, 무리수의 근사분수를 구한다.) [탐구 5] $\sqrt{2}$의 근사분수 구하기 ▹황금비(ϕ)에 대한 전차시의 학습 내용 복습 ▹$\sqrt{2}$의 재귀적 표현을 이용한 근사분수 구하기 [탐구 6] $\sqrt{2}$의 근사분수의 수렴성 추론 ▹근사분수를 소수로 표현하기 ▹근사분수의 오차 구하기 ▹근사분수의 수렴성 추론하기
활동4	[탐구 7] (심화선택과제) π의 근사분수 구하기 ▹π의 근사분수 검색 ▹π의 재귀적 표현을 이용한 근사분수 구하기 ▹두 결과를 비교하기

활동3에서는 전차시의 $\sqrt{2}$의 재귀적 표현을 이용하여 무리수 $\sqrt{2}$에 수렴하는 근사분수 수열을 찾는다. 이를 위해 재귀적 표현을 바탕으로 근사분수로 구하고 수렴성을 추론한다. 황금비에 비해 $\sqrt{2}$의 근사분수를 구하는 프로그래밍은 약간 복잡한 절차를 수행하게 된다.

활동4에서는 무리수 π에 대해 근사분수를 찾는 프로그래밍을 한다. π는 이전의 무리수에 비해 재귀적 표현이 불규칙적이어서 근사분수를 찾는 프로그래밍이 좀 더 복잡하다. 따라서 활동4는 심화선택과제로 제시하였다.

Table 5는 5차시 활동을 위해 개발한 활동지 내용이다.

***Table* 5.** 5th lesson (90 minutes) Student Activity Materials

주제	좌표평면에서 근사분수를 기울기로 하는 직선의 변화 추론하기
준비물	좌표평면, 자, 색 사인펜 등 지필 환경
활동	내용
활동5	(학생별 지필 도구를 제공하고, 무리수를 기울기로 하는 직선을 추론한다.) [탐구 8] 황금비(ϕ)의 근사분수를 직선의 기울기로 해석하여 기울기의 변화 추론하기 ▹기울기(황금비의 근사분수)의 변화 추론하기 ▹직선 $y=\phi x$ 를 좌표평면에 그려보고, 직선이 격자점을 지나는지 추론하기 [탐구 9] $\sqrt{2}$ 의 근사분수를 직선의 기울기로 해석하여 기울기의 변화 추론하기 ▹기울기($\sqrt{2}$ 의 근사분수)의 변화 추론하기 ▹직선 $y=\sqrt{2}\,x$ 를 좌표평면에 그려보고, 직선이 격자점을 지나는지 추론하기
활동6	[탐구 10] 유리수와 무리수의 성질 알아보기 ▹순환소수가 분수로 표현되는 이유 설명 ▹ϕ, $\sqrt{2}$ 가 순환소수로 표현되지 않는 이유 설명 [탐구 10] 무리수 다시 살펴보기 ▹무리수를 정의하기 ▹직선 $y=ax$ 가 격자점을 지나지 않기 위한 조건 구하기

활동5에서는 무리수의 근사분수를 직선의 기울기로 해석하여 기울기의 변화를 추론하고 무리수를 기울기로 하는 직선이 격자점을 지날지 또는 지나지 않을지를 추론하여 무리수의 비순환성을 해석할 수 있다. 활동6에서는 지금까지의 활동 내용을 정리하는 것이다.

2. 개발된 과제의 적용

가. 연구 참여자

연구 참여자는 강원도 군 소재지에 위치한 A중학교 2학년 남학생 7명이다. A중학교의 2학년은 8개 학급의 185명으로 구성되어 있다. 수학 학업성취도는 전국단위로 비교했을 때 중하 정도이며, 학부모들은 수학 학습에 대한 교육열이 높은 편이다. 이 지역의 사교육이 속진이나 심화는 아니어서 학생들은 교육과정 수준의 사교육을 받는 경우가 많다.

교수실험의 교육과정 내용 수준을 고려하여 연구자들은 무리수 학습 이전인 중학교 2학년을 적합하다고 판단하였고, 담당 수학 교사가 평소 수학을 좋아하면서 과제에 적극 참여하는 학생들을 먼저 추천하였으며, 본인과 보호자의 희망에 의해 최종 선정하였다.

연구 참여자는 모두 학교 내신 성적의 수학 학업성취도가 상위 30% 이내인 학생들이며, 그 중 상위 10% 이내인 학생이 3명(S1, S2, S3), 그 외 학생이 4명(S4~S7)이었다. 또한 이들은 평소 수업에서 의사소통이 활발하며 수학 문제해결에 끈기 있게 도전하는 집단이었다.

나. 교수실험

교수실험은 ‘학기말 교육과정 정상화’ 방안의 일환으로 실시하였으며, 학생과 보호자의 동의를 받아 방과후 과정을 이용하여 진행하였다. 교수실험을 위한 세부 차시는 90분씩 5차시로 실시하였으며, 그 중에 2차시는 스프레드시트와 친해지는 놀이 시간으로 활용하였다. 따라서 본 교수실험은 3차시로 이루어졌다.

교수실험의 수업 형태는 스프레드시트의 활용과 탐구 결과를 논의하기에 용이한 방식을 취하였다. 그리하여 학생 활동 중심 수업, 모둠 수업 그리고 전체 토론 수업을 병행하였다.

3. 분석방법

본 과제에서 도구 발생의 관련요소는 Drivers

& Gravemeijer(2005), 한세호, 장경윤(2009)의 연구를 참고하고, 앞서 제시한 무리수의 핵심개념(*Table* 1)을 토대로 무리수 과제 해결을 위해 스프레드시트를 주요 도구로 다루는 교수학습으로부터 생성하고자 하는 스킴의 핵심요소들을 추출하여 제시하였다.

이론적 분석을 바탕으로 *Table* 6과 *Table* 7에 제시된 도구화된 활동 스킴은 학생들의 무리수에 대한 개념 학습의 근거가 될 수 있음을 알 수 있으며, 이에 따라 과제의 효과성을 분석할 수 있다고 판단하였다.

자료 수집을 위해 녹음기와 2대의 스마트기기로 수업 상황을 녹화 및 녹음하였다. 수업을 참관한 연구자는 교수학습과정에서의 학생 행동 특성을 관찰 기록하였으며, 녹화 및 녹음 파일을 전사하였다. 수업 과정에서 현상을 깊이 있게 이해하기 위해 학생들이 작성한 활동지를 모두 수집하여 스캔하였으며, 학생이 그린 그림과 설명을 확인하였다. 면담자료를 수집하기 위해 교수실험을 진행한 1주일 이후 반구조화된 면담을 시행하였다. 활동이나 작성한 활동지에서 특기할만한 반응을 보인 학생 2명에 대해서 수집된 자료를 같이 보며 면담하였으며, 면담도 녹화 및 녹음 파일을 전사하여 분석 대상으로 삼았다. 이처럼 관찰, 문서, 면담 등 자료 수집을 다원화하여 연구의 신뢰성을 확보하고자 하였다.

학생들의 학습 활동의 도구 발생 분석을 위한 분석틀로서 *Table* 6과 *Table* 7을 사용하였다. 선행연구에서 사용 스킴과 IAS의 구분은 명확하지 않다고 하였으며 본 연구에서는 스프레드시트의 공학적 도구의 사용 스킴을 무리수 과제 해결을 위해 스프레드시트의 특정 부분을 사용하면서 형성되는 스킴(IAS)에 포함되는 것으로 고려하였다. 이에 무리수의 소수표현과 분수표현에 대하여 도구 발생의 IAS 핵심 요소를 각각 추출하여 분석틀로 설정한 것이다.

***Table* 6.** Core elements of IAS for decimal representation

소수 표현을 위한 IAS 핵심요소	
D1	마우스 drag 사용이 스프레트시트 열(列)의 1행과 2행의 수의 차를 갖는 데이터들을 만드는 것임을 기억하기
D2	곱셈식이 제곱을 구하는 계산식임을 알기
D3	마우스 drag 사용이 스프레드시트의 셀에 입력된 계산식을 그 셀을 포함한 열의 계산식으로 입력하는 것임을 기억하기
D4	스프레드시트 열에 수의 단위를 다르게 입력하는 것(단위1, 0.1, 0.01, 0.001 등)이 $\sqrt{2}$의 근사소수를 찾는 것임을 깨닫기
D5	스프레드시트의 두 열(소수와 그 제곱)의 셀로 이루어진 행(行)을 $\sqrt{2}$의 근사소수를 선정하는 근거로 해석할 수 있기
D6	스프레드시트 셀에 =SQRT(2)를 바르게 입력할 수 있기
D7	스프레드시트에서 소수와 그 제곱을 이용하여 $\sqrt{2}$의 근사소수를 구한 것과 함수식(=SQRT(2))을 입력하여 구한 것을 관계지울 수 있기

Table 7. Core elements of IAS for fractional expression

분수 표현을 위한 IAS 핵심요소	
F1	스프레드시트 셀에 함수식 =SQRT(2), =(SQRT(5)+1)을 바르게 입력할 수 있기
F2	스프레드시트 함수식 INT가 무리수 근삿값에서 정수부분을 분리하는 것임을 알기
F3	스프레드시트 계산식에서 마이너스(-) 사용이 무리수의 근삿값과 정수부분으로부터 소수부분을 구하는 것임을 알기
F4	스프레드시트 계산식에서 나누기(/) 사용이 재귀적 표현에서의 분자와 관련된 것임을 깨닫기
F5	스프레트시트의 무리수 근삿값의 정수부분을 재귀적 표현에서 해석하기
F6	재귀적 표현을 이용하여 근사분수를 구하기
F7	좌표평면에 근사분수를 기울기로 갖는 직선을 표현하기
F8	근사분수를 기울기로 갖는 직선들로부터 $\sqrt{2}$를 기울기로 갖는 직선위의 격자점의 존재성을 추론하기

Ⅳ. 연구 결과

스프레드시트에 대한 친숙함을 도모하는 활동 1-2차시는 도구화 단계였다면, 본 교수실험의 3-5차시에는 교수의도에 맞게 제공된 도구장착으로부터 학습이 이루지면서 도구 발생적 접근에 의한 수학적 이해가 성장했음을 확인하였다.

1. 소수 표현의 도구 발생

Table 6 목록의 항목들은 $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 근사소수로 구하는 기술적 절차였다. 교사는 단위에 따라 드래그 기능으로 연속 데이터를 입력하도록 안내하였으며, 모든 학생들은 별다른 어려움 없이 기능을 수행할 수 있었다.

Table 6 목록의 D2에서 학생들은 제곱을 구하는 방법이 해당 주소 값의 곱셈식 '=A1*A1'으로 계산하는 것임을 이해할 수 있었다.

① 1 단위 정확성

	A	B	C
1	1		1
2	2		4
3	3		9
4	4		16
5	5		25
6	6		36
7	7		49
8	8		64
9	9		81
10	10		100

② 0.1 단위 정확성

	A	B	C
1	1.1		1.21
2	1.2		1.44
3	1.3		1.69
4	1.4		1.96
5	1.5		2.25
6	1.6		2.56
7	1.7		2.89
8	1.8		3.24
9	1.9		3.61
10	2		4

③ 0.01 단위 정확성

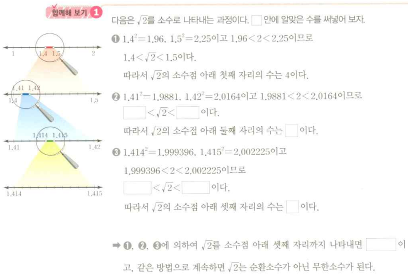
	A	B	C
1	1.41		1.9881
2	1.42		2.0164
3	1.43		2.0449
4	1.44		2.0736
5	1.45		2.1025
6	1.46		2.1316
7	1.47		2.1609
8	1.48		2.1904
9	1.49		2.2201
10	1.5		2.25

④ 0.001 단위 정확성

	A	B	C
1	1.411		1.990921
2	1.412		1.993744
3	1.413		1.996569
4	1.414		1.999396
5	1.415		2.002225
6	1.416		2.005056
7	1.417		2.007889
8	1.418		2.010724
9	1.419		2.013561
10	1.42		2.0164

***Figure* 2.** Results of Activity 1: Approximate decimal representation of $\sqrt{2}$

이 과제의 의도는 *Figure* 3과 같이 교과서에서 $\sqrt{2}$ 를 소수로 나타내는 과정 대신에, 공학 도구를 편리하게 활용하도록 변형한 것이다.


함께해 보기 1

다음은 $\sqrt{2}$를 소수로 나타내는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

❶ $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$이고 $1.96<2<2.25$이므로

$1.4<\sqrt{2}<1.5$이다.

따라서 $\sqrt{2}$의 소수점 아래 첫째 자리의 수는 4이다.

❷ $1.41^2=1.9881$, $1.42^2=2.0164$이고 $1.9881<2<2.0164$이므로

$\square<\sqrt{2}<\square$이다.

따라서 $\sqrt{2}$의 소수점 아래 둘째 자리의 수는 □이다.

❸ $1.414^2=1.999396$, $1.415^2=2.002225$이고

$1.999396<2<2.002225$이므로

$\square<\sqrt{2}<\square$이다.

따라서 $\sqrt{2}$의 소수점 아래 셋째 자리의 수는 □이다.

➡ ❶, ❷, ❸에 의하여 $\sqrt{2}$를 소수점 아래 셋째 자리까지 나타내면 □이고, 같은 방법으로 계속하면 $\sqrt{2}$는 순환소수가 아닌 무한소수가 된다.

***Figure* 3.** Decimal representation of $\sqrt{2}$ (Jang et al., 2020, p. 21)

Figure 3에서 $\sqrt{2}$ 의 소수 첫째 자리 수를 구하는 과정은 1.1^2 부터 1.9^2 을 모두 계산하는 과정을 생략한 채, 1.4^2, 1.5^2 만 계산만 계산하도록 요구하고 있다. 이는 1.4^2, 1.5^2 만 제시하더라도 학생들이 1.1^2 부터 1.9^2 을 계산하는 과정을 거칠 것이라고 기대하는 것이지만, 실제 수업에서 학생들이 그러한 과정을 거칠 것이라고 보장할 수는 없다. 소수 둘째 자리, 소수 셋째 자리 등에 대해서도 같은 방법으로 설명하지만, 학생들은 $1.41, 1.414, \cdots$등의 근사소수가 왜 나오는지 관심을 두기 어렵다. *Figure* 2와 같이 스프레드시트의 제곱식으로 구현하면, 드래그 기능만으로 각 소수 자리의 수에서 해당 셀의 계산을 쉽게 할 수 있으며 그 계산 결과를 한 눈에 비교할 수 있어서 학생들은 근사소수 $1.414\cdots$이 되는 이유를 구체적으로 확인할 수 있다.

교수학적 조치를 통해 수렴성과 관련하여 소수 표현은 $\sqrt{2}$ 로 수렴해 갈 것임을 학생들이 확인할 수 있다고 기대하였다.

또한 *Figure* 4는 이와 같은 방법으로 근사소수

를 찾아간 결과를 하나의 시트에 나타낸 것이다. *Table* 6 목록의 D4에서 학생들은 $\sqrt{2}$ 의 근사소수를 소수 일곱째 자리까지 구할 수 있었다. 즉, *Figure* 4의 활동 결과를 적용하여 해당 셀만을 남겨두고 소수 넷째 자리 이후로 소수 자릿수를 늘여가면서 학생들은 제곱한 결과가 2에 점점 더 가까워진다는 사실을 발견하였다. 학생 S1의 답변에서 소수 아홉째 자리의 근사소수를 제곱하면 2에 가까운 수가 여러 번 나온다는 것을 인식하였음을 알 수 있다.

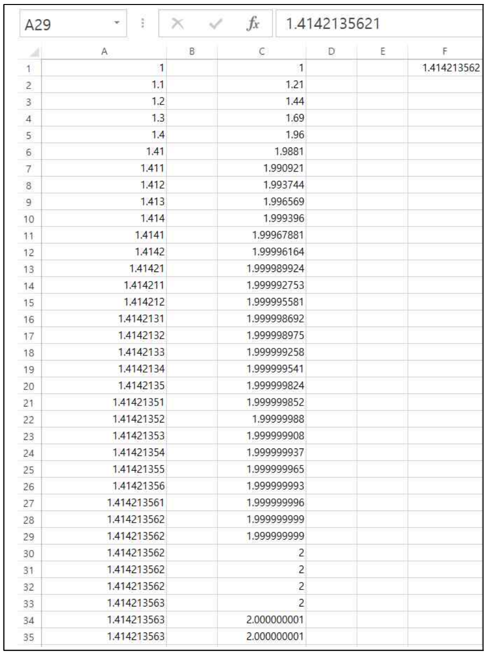
> S1: 범위를 늘려가면서 확인해보니 앞부분은 미세하게 변하다가 이후로 갈수록 (제곱 값이) 변하지 않는 소수 자리가 늘어나게 되어 정확한 값을 나타내는 것 같다.

Figure 4와 같이, 소수 아홉째 자리의 근사소수를 제곱하면 모두 2에 가까운 값이 출력된다는 점에서 학생들은 '수렴성'을 직감할 수 있었다. 이는 $\sqrt{2}$ 를 1.4142135 등과 같은 유한소수열이 어떤 값에 가까이 간다는 수렴성을 직관적으로 이해한 것이라고 볼 수 있다.

또한 제곱근의 유한소수열을 구하는 활동에서 학생들은 함수식과 계산식 입력, 드래그와 반복 기능 사용을 통해 제곱근을 단순히 기호가 아닌 수의 크기로서 소수 표현과 관련지으면서 유의미하게 이해하였다.

D6에서 학생들은 함수식 SQRT(2)를 이용하여 스프레드시트가 최대로 나타낼 수 있는 소수 아홉째 자리까지의 값을 출력할 수 있었으나, 그 이상의 정확한 참값을 표현할 수 없다는 도구의 한계점을 인식하였다.

> S7: (A29의 값을 가리키며) 어? 소수 열 번째 자리는 21, 22, 23이라고 해도 그냥 반올림해버리네. (A28~A32의 값을 가리키며) 여기 모두 3562로 입력이 돼.


A29 1.4142135621

	A	B	C	D	E	F
1	1		1			1.414213562
2	1.1		1.21			
3	1.2		1.44			
4	1.3		1.69			
5	1.4		1.96			
6	1.41		1.9881			
7	1.411		1.990921			
8	1.412		1.993744			
9	1.413		1.996569			
10	1.414		1.999396			
11	1.4141		1.99967881			
12	1.4142		1.99996164			
13	1.41421		1.999989924			
14	1.414211		1.999992753			
15	1.414212		1.999995581			
16	1.4142131		1.999998692			
17	1.4142132		1.999998975			
18	1.4142133		1.999999258			
19	1.4142134		1.999999541			
20	1.4142135		1.999999824			
21	1.41421351		1.999999852			
22	1.41421352		1.99999988			
23	1.41421353		1.999999908			
24	1.41421354		1.999999937			
25	1.41421355		1.999999965			
26	1.41421356		1.999999993			
27	1.414213561		1.999999996			
28	1.414213562		1.999999999			
29	1.414213562		1.999999999			
30	1.414213562		2			
31	1.414213562		2			
32	1.414213562		2			
33	1.414213563		2			
34	1.414213563		2.000000001			
35	1.414213563		2.000000001			

***Figure* 4.** Results of S1

이에 대해 토론하면서 교사는 $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 소수로 표현하는 방법 이외에 다른 표현 방법에 대해 생각해 보도록 하였고, 분수 표현도 가능함을 설명하였다. SQRT(2)의 오차를 줄이는 방법으로 분수를 이용하는 방법을 다음 차시 주제로 예고하였다.

> S5: 컴퓨터로 루트 값을 구하는 법을 배우고 제가 모르던 프로그램 사용법을 배워서 신기했고 재밌는 시간을 보냈습니다. 분수형 루트를 구하는 법을 알고 싶습니다.

이러한 과정은 도구장착 과정에서 예기치 않은 답을 얻게 되면서 우연히 만나는 도구의 한계가 또 다른 학습 기회를 제공한다는 한세호와

장경윤(2009, p. 532)의 주장과 관련되는 것이다.

이와 같이 간단한 수식으로 반복 계산 절차를 수행하는 스프레드시트의 기술적인 특성은 무리수의 수렴성에 대한 개념 이해를 도울 수 있음을 확인하였다. 이는 무리수의 소수 표현이 가진 수렴성에 대한 도구 발생 과정을 의미한다.

2. 분수 표현의 도구 발생

유클리드 알고리즘에 의한 유리수의 재귀적 표현은 유한 과정으로 끝난다. 학생들은 간단한 나눗셈 계산을 하면서 유리수와 유한 단계의 재귀적 표현 사이의 관계를 올바르게 이해하였다. 대부분의 학생들이 지필환경에서 역수를 이용하여 유리수를 유한 단계의 반복 계산식으로 표현하고 이를 다시 분수로 변환하는 과제를 수행할 수 있었다. 그러나 계산 절차가 오래 걸리므로, 과제의 수행 속도에는 개인차가 나타났다.

무리수의 재귀적 표현은 무한 과정까지 계속된다. 무리수 과제는 다소 복잡한 계산 절차이기에 스프레드시트 환경에서 수행하였고, 학생들은 교사의 안내에 따라 과제를 성공할 수 있었다.

Table 7 목록의 F1에서 $\sqrt{2}$ 의 값을 구하기 위해 함수식 SQRT(2)를 입력하도록 하는 것은 강정기(2016)의 연구에서 제안한 학습자의 제곱근 기호에 대한 유의미한 이해를 내포한다. 학생들이 $\sqrt{2}$ 를 보이는 대로 근호가 있는 수라고 피상적으로 이해할 수 있는데, 이러한 함수식 입력을 통하여 제곱하여 2가 되는 수라는 의미를 드러내는 표상으로서 $\sqrt{2}$ 를 이해할 수 있게 되었다.

학생들은 무리수를 연산이나 방정식의 근을 구하는 활동에서 주로 다루다보니 값을 확인하고 사용하는 경험이 적다. F2와 F3은 무리수가 정수부분과 소수부분의 합이며 무리수의 소수부분은 무리수에서 정수부분을 뺀 것이라는 것을 학습자가 의식하도록 한다. 이는 무리수 연습 문제 해결 전략으로서 활용하도록 한다. 더불어 무리수의 값을 직접 확인하도록 함으로써 수와 기호 측면에 대한 균형적 이해를 하게 되었다.

유클리드 알고리즘 자체는 중학생들에게 낯선 내용이지만 분수 또는 대분수 등은 익숙하다. 따라서 재귀적 표현 활동의 목적을 이해하는 학습자는 안내된 절차에 따라 수행하는 것에 큰 어려움은 없었다. 다만 재귀적 표현에서 분자가 1인 것은 형식이므로 F4는 이것에 주목하도록 하며 학생들은 1보다 작은 양의 소수를 1보다 크게 하기 위해 역수를 취하는 아이디어를 이해하고 사용할 수 있게 되었다.

교수학습 운영에서는 시간도 변수이다. 활동중심의 수업의 경우는 특히 학생들 활동 시간이 동일하지 않고 그들의 수행 능력이 달라 수업 시간 내에 수업 의도를 달성하지 못하는 경우가 종종 있다. F5는 복잡한 계산을 공학이 대신하게 함으로써 수학적 사고 시간을 벌어주게 되며 학생들은 비슷하게 빠른 시간 내에 계산 결과를 확인할 수 있었다.

지필계산능력이 뛰어난 학습자라도 재귀적 표현을 지필환경에서 구하는 것은 비효율적이며 시간을 지체하게 한다. F6은 공학 도구를 활용하고 무리수 근삿값의 정수부분을 유클리드 알고리즘과 연결하여 재귀적 표현을 용이하게 한다. 이를 통해 학생들은 $\sqrt{2}$ 의 재귀적 표현의 특징을 조사하고, 다른 무리수의 재귀적 표현과 비교할 수 있게 되었다.

활동2~4에 해당하는 탐구 과제에서 학생들은 재귀적 표현을 이용하여 근사분수를 구하는 과정을 가장 어려워하였다. 교사의 안내는 필수적이었으며, 과제 제시 순서도 가장 간단한 황금비

(ϕ)의 예제를 교사와 함께 실행하고, $\sqrt{2}$ 의 과제를 모둠별로 해결하도록 하였다. 예비실험을 바탕으로 π 에 대해서는 재귀적 표현의 규칙성이 없어서 학생들은 더 어려워할 것으로 예상하였으므로, 개별 심화 과제로 다루도록 하였다.

황금비(ϕ)와 $\sqrt{2}$ 는 대수적인 무리수로 재귀적 표현의 규칙성이 나타난다. 학생들은 규칙이 가장 단순환 황금비를 바탕으로 근사분수를 구하는 원리를 이해하려고 시도하였으며, 일부 학생들만 성공하였다. 나머지 학생들은 모둠 동료의 도움을 받아 수행할 수 있었다.

Table 7 목록의 F1에서 공학 환경으로 황금비(ϕ)와 $\sqrt{2}$ 의 함수식을 통해 제한적이지만 스프레드시트가 곧바로 제공하는 최적의 값을 구할 수 있었다. 이를 F6에서 도구를 사용하여 절차에 따라 구한 근사분수와 오차를 비교하면서 학생들은 단계별로 오차의 규칙성을 이해할 수 있게 되었다.

Table 7 목록의 F7은 지필 환경에서 또 다른 도구로 좌표평면을 사용하였다. 황금비(ϕ)와 $\sqrt{2}$ 의 근사분수를 직선의 기울기로 표상한 것을 관찰하여, 이를테면 '직선 $y=\sqrt{2}x$는 격자점을 지날 수 있을까?' 라는 과제 해결을 통해 학생들은 무리수의 소수표현에서의 비순환성을 추론할 수 있었다. 학생 S2와 S3의 답변을 통해 근사분수로 그린 직선 사이 어딘가에 무리수 기울기를 가진 직선이 지날 것이라고 추론함을 알 수 있었다.

학생 S2는 *Figure* 5와 같이 기울기들이 일치해 보이지만 *Figure* 6을 참조하여 매우 미세한 차이들로 떨어져 있고 증가했다가 낮아지고 다시 증가했다가 낮아진다는 변화를 인식하였다. 즉, F5에서 스프레드시트로 계산한 오차가 +, -를 반복하면서 오차의 절댓값은 점점 작아지는 소수였음을 인식하고, 이를 좌표평면과 서로 관계지우고 있으며, 이로써 스프레드시트의 도구 발생 과정을 확인할 수 있었다.

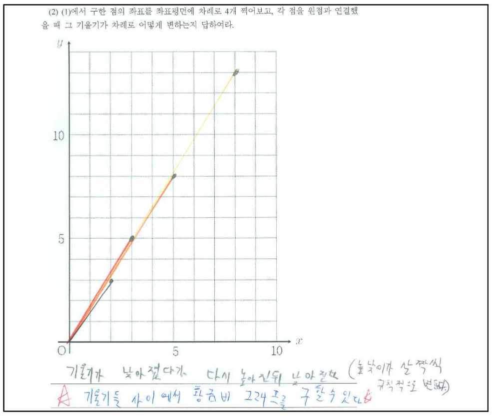


***Figure* 5.** Results of S2 in Activity 5: $y=\phi x$

Q	R	S	T	U	V	W	X
	분자		분모				오차
1단계	3	/	2	=	1.5		0.085786438
2단계	7	/	5	=	1.4		-0.014213562
3단계	17	/	12	=	1.416666667		0.002453104
4단계	41	/	29	=	1.413793103		-0.000420459
5단계	99	/	70	=	1.414285714		7.21519E-05

***Figure* 6.** Decimal representation and error of approximate fraction

Figure 7에서도 학생 S3은 직선 $y=\sqrt{2}\,x$ 가 격자점을 지나지 않을 것이며, 이는 분수 꼴로 나타낼 수 없다는 의미와 연결하고 있음을 나타낸다. S3의 사례에서도 스프레드시트와 좌표평면의 도구 발생 과정을 확인할 수 있었다.

마지막으로 F8에서 무리수를 정의하면서 본 교수실험과 어떤 관련이 있는지를 토론하였다. 관찰한 프로토타입은 다음과 같다.

S1: 무리수를 소수로 표현하면 순환하지 않아.
S2: 분수로 표현하면 분수를 기울기로 갖는 직선이 되어서 격자점을 지나.

S6: 격자점을 지나면 무슨 일이 일어나는데?
S4: 격자점을 지나면 유리수가 되잖아.
S3: 격자점을 지나지 않는다는 것은 무한소수이지만 순환하지 않기 때문이야.

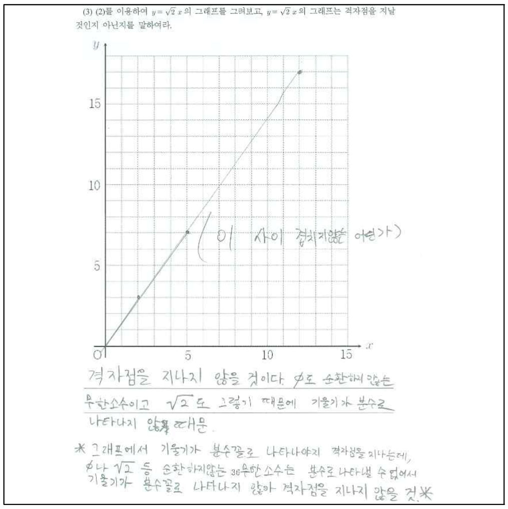


***Figure* 7.** Results of S3 in Activity 5: $y = \sqrt{2}\,x$

이와 같이 학생들은 격자점을 지나지 않는다는 직관으로부터 무리수의 존재성을 추론할 수 있었다. 따라서 본 연구는 $\sqrt{2}$를 분수로 표현할 수 없다는 심상을 구성하도록 하는 무리수 교수학습의 적용 가능성을 확인한 것이다.

V. 논의 및 결론

본 연구는 무리수 정의가 완비성을 전제하고 있어 중학생들이 이해하기 어렵다는 문제의식에서 출발하였다. 대안적인 방법으로 근사분수를 이용한 직선의 기울기를 통해 무리수성(irrationality)을 인식하게 하는 과제를 개발하였다. 이를 실행하기 위해 지필 계산으로는 한계가 있으므로 스프레드시트를 이용한 계산 결과를 좌표평면에 표현하도록 하여 개념이미지가 형성되는지에 대한 현장적합성을 확인하였다. 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 무리수를 기울기로 하는 경우 격자점과 만나지 않는 직선이 된다는 개념이미지를 형성할 수 있었다. 교과서(장경윤 외, 2020)에서 “무리수는 소수로 나타내면 순환소수가 아닌 무한소수가 된다(p. 21).” 또는 “수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다(p. 24).” 는 표현으로 무리수 개념을 다루지 않은 채 받아들이도록 인정하는 측면이 있었다. 이는 비순환무한소수로 표현되는 수란 어떤 수인지의 논의가 결여된 것이며, 수학적으로 어려운 무리수의 통약불가능성을 감추고 있는 것이다(우정호, 2017, pp. 277-279). 이러한 상황에서 학생들은 무리수의 비순환성에 대한 핵심 관념을 이해하기 어렵다. 또한 학생들은 대수적 표현을 중심으로 한 교과서의 전개 내용을 통해 단편적 지식만을 갖게 되고 무리수의 본질을 실감 있게 이해하기란 쉽지 않을 것이다. 비순환성은 분수로 표현할 수 없다는 의미로, 이를 이해하는 데 분수를 언급할 필요가 있다. 따라서 비순환성에 대한 개념이미지가 필요하다는 것이며, 본 연구에서 격자점을 지나지 않는다는 기하학적 표현을 보완하여 긍정적인 결과를 확인하였다.

둘째, 학생들은 비순환 무한소수 외에도 분수 표현을 보완하여 무리수의 개념을 더 깊이 있게 학습할 수 있었다. 교과서(장경윤 외, 2020)에서 유리수가 아닌 무리수를 정의하기 위해 유리수를 분수로 표현하고 이를 다시 순환소수로 표현한다. 무리수는 비순환소수로 개념화하면서 사실은 분수로 표현할 수 없다는 의미를 갖지만, 순환소수와 비순환소수로 대조한다. 그 다음 순환소수에 대해 논의하므로, 비순환소수의 개념화에

는 분수가 관심 영역에서 빠지게 된다. 본 연구에서는 이를 보완하기 위해 분수로 표현될 수 없는 수의 의미를 드러내고자 하였으며, 설계된 과제의 적용을 통해 비(非)분수 표현과 비(非)순환 무한소수 표현 사이의 유기적인 연결성이 중요함을 확인하였다. 이는 소수 표현만으로는 무리수 개념을 투명하게 드러내지 못한다고 말한 이지현(2014)의 연구 결과와 일치한다.

이러한 연구결과는 무리수의 학습 지도에 다음과 같은 교수학적 시사점을 제공한다.

첫째, 학생들은 좌표평면에서 형성한 개념 이미지를 바탕으로 $\sqrt{2}$가 유리수가 아니라는 귀류법 증명의 아이디어를 가질 수 있다. 무리수의 개념 학습에서 분수로 표현할 수 없다는 심상을 구성하도록 하는 것이 핵심이다. 본 교수실험에서 분수로 표현할 수 없는 기울기를 갖는 직선은 격자점을 지날 수 없다는 것을 설명하는 과정에서 바로 귀류법이 내포된다. 이는 우정호(2017, p. 287)가 통약불가능성과 관련된 기하학적 접근이 무리수의 직관적인 이해에 필요하다고 한 것과 일맥상통하다.

둘째, 무리수의 수직선 표현이 아닌, 좌표평면 표현을 재고할 필요가 있다. 교과서에서는 주로 소수 표현과 수직선 표현을 다루는 것으로 해석된다. 그러나 학생들은 비순환 무한소수 표현에서 $\sqrt{2}$로 수렴하는 수열은 수렴성을 볼 수 있지만, 본 연구를 통해 비순환성은 좌표평면에서 분수 표현을 보완하는 대안적 방법으로 인식할 수 있었다. 변희현(2005)은 학생들이 위로 유계이면 수렴성을 보지 못함을 확인하였다. 즉, '극한값($\sqrt{2}$, π 등)'이 보이는 경우에만 수렴성을 인식할 뿐, 극한값이 보이지 않으면 수렴성을 인식하지 못함을 확인한 것이다. 이는 교과서의 수직선 표현이 무리수의 의미를 모두 드러내지 못함을 의미한다. 따라서 좌표평면에서 분수 표현을 드러내는 방법을 모색할 필요가 있다.

본 연구는 무리수를 정의하기에 앞서 실수를 통해 설명하는 순환적 정의를 피하기 위해 무리수의 성질을 드러내는 과제를 개발하고, 그 과제의 현장 적용가능성을 탐색하였다. 이를 해석하는 과정에서 귀류법과 좌표평면이 무리수의 학습 지도에 중요하다는 것을 밝힌 점에서 연구의 의의를 찾을 수 있다. 특히 귀류법과 좌표평면은 무리수의 역사에서 중요한 이슈와 관련이 있다. 이에 대한 역사적 분석 및 교육적 시사점에 대한 후속연구를 기대한다.

참고문헌

Byun, H. H. (2005). *A Didactical Analysis of the Decimal Fraction Concept*. Doctoral dissertation, Seoul National University Graduate School.
변희현(2005). **소수 개념의 교수학적 분석**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Byun, H. H. & Park, S. Y. (2002). Teaching and Learning Irrational Number with Its Conceptual Aspects Stressed : Consideration of Irrational Number through the Conception of 'Incommensurability' *School Mathematics, 4*(4), 643-655.
변희현, 박선용(2002). 무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안: '통약 불가능성'을 통한 무리수 고찰. **학교수학, 4**(4), 643-655.

Chang, K. Y., et al. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Seoul: Jihaksa.
장경윤 외(2020). **중학교 수학3**. 서울: 지학사.

Choi, E. A. & Kang, H. I. (2016). Pre-Service Teachers' Understanding of the Concept and

Representations of Irrational Numbers. *School Mathematics, 18*(3), 647-666.
최은아, 강향임(2016). 예비교사의 무리수의 개념과 표현에 대한 이해. **학교수학, 18**(3), 647-666.

Drijvers, P. & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. In Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. Boston, MA: Springer.

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in mathematics education, 15*(3), 230-248.

Han, S. H. & Chang, K. Y. (2009). Instrumental Genesis of Computer Algebra System(CAS) in Mathematical Problem Solving among High School Students. *School Mathematics, 11*(3), 527-546.
한세호, 장경윤(2009). 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생. **학교수학, 11**(3), 527-546.

Kang, H. I. & Choi, E. A. (2017). Teacher Knowledge Necessary to Analyze Student's Errors and Difficulties about the Concept of Irrational Numbers. *School Mathematics, 19*(2), 319-343.
강향임, 최은아(2017). 무리수 개념에 관한 학생의 오류와 어려움 해석에 필요한 교사지식, **학교수학, 19**(2), 319-343.

Kang, J. G. (2016). Difficulties and Alternative Ways to learn Irrational Number Concept in terms of Notation. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 19*(1), 63-82.
강정기(2016). 표기 관점에서 무리수 개념 학습의 어려움과 대안. **학교수학회논문집, 19**(1), 63-82.

Kim, B. Y. & Chung, Y. W. (2008). Inducing Irrational Numbers in Junior High School. *The Korean Journal for History of Mathematics, 21*(1), 139-156.
김부윤, 정영우(2008). 중학교에서의 무리수 지도에 관하여. **한국수학사학회지, 21**(1), 139-156.

Kim, B. Y. & Lee, J. S. (2008). Technology as Instruments and the Change of Paradigm in Mathematics Learning. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 47*(3), 261-271.
김부윤, 이지성(2008). Instrument 로서의 테크놀로지와 수학 학습 패러다임의 변화. **수학교육, 47**(3), 261-271.

Kim, S. R., et al. (2013). *Middle School Mathematics 3*. Seoul: Chunjae.
김서령 외(2013). **중학교 수학3.** 서울: 천재교육.

Klein, F. (1924). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint- Arithmetic·Algebra·Analysis*. New York: Dover Publications.

Lee, J. H. (2014). The Infinite Decimal Representation: Its Opaqueness and Transparency. *Journal of Educational Research in Mathematics, 24*(4), 595-605.
이지현(2014). 무한소수 기호: 불투명성과 투명성. **수학교육학연구, 24**(4), 595-605.

Lee, J. H. (2015). Beyond the Union of Rational and Irrational Numbers: How Pre-Service Teachers Can Break the Illusion of Transparency about Real Numbers?. *Journal of Educational Research in Mathematics, 25*(3), 263-279.
이지현(2015). 유리수와 무리수의 합집합을

넘어서: 실수가 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가?. **수학교육학연구, 25**(3), 263-279.

Lee, S. B. (2013). Preservice secondary matheamtics teachers' understanding of irrational numbers. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 16*(3), 499-518.
이선비(2013). 예비 중등 교사들의 무리수에 대한 이해. **학교수학회논문집, 16**(3), 499-518.

Lee, Y. R. & Lee, K. H. (2006). A Case Study on the Introducing Method of Irrational Numbers Based on the Freudenthal's Mathematising Instruction Theory. *Journal of Educational Research in Mathematics, 16*(4), 297-312.
이영란, 이경화(2006). Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례. **수학교육학연구, 16**(4), 297-312.

Loborde, C. & StraBer, R. (2010). Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. *ZDM, 42*, 121-133.

Oh, K. H., Park, J. S. & Kwon, O. N. (2017). A textbook analysis of irrational numbers unit: focus on the view of process and object. *The Mathematical Education, 56*(2), 131-145.
오국환, 박정숙, 권오남(2017). 무리수 단원에 대한 교과서 분석 연구: 과정과 대상의 관점으로. **수학교육, 56**(2), 131-145.

Park, S. Y. (2016). Defining the Infinite Decimal without Using the 'Limit to a Real Number'. *Journal of Educational Research in Mathematics, 26*(2), 159-172.
박선용(2016). '어떤 실수로의 극한'을 사용하지 않고 무한소수를 정의하기, **수학교육학연구, 26**(2), 159-172.

Park, Y. H., Park, D. W. & Jung I. C. (2004). Study on learneer's understanding of the concept of irrational number in middle school. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 7*(2), 99-116.
박윤희, 박달원, 정인철(2004). 중학교 수학에서 무리수 개념에 관한 학습자의 이해 연구. **학교수학회논문집, 7**(2), 99-116.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 137-162). N.Y.: Springer.

Trouche, L. (2018). Understanding the work of teachers through their interaction with their teaching resources -a history of trajectories. *Educación Matemática, Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C., 30*(3), 9-40. available from: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01943610/document

Woo, J. H. (2017). *School math educational foundation (revised) A*. Seoul: Seoul National University Publishing Council.
우정호(2017). **개정판 학교수학의 교육적 기초 상**. 서울: 서울대학교출판문화원.