Original Article

빈도적 관점에서의 조건부확률 도입 사례 연구: 빈도 수형도와 시뮬레이션의 활용을 중심으로

최인용[†]

한성과학고등학교 교사

Introduction of Conditional Probability with the Relative Frequency Approach: Focus on the Use of the Frequency Tree Diagram and Simulation

Inyong Choi[†]

Teacher, Hansung Science High School, South Korea

Abstract

빈도적 관점에서 조건부확률 도입의 가능성을 확인하기 위하여 빈도 수형도와 시뮬레이션을 활용한 도입 활동을 고안하고 고등학교 1학년 14명에게 모둠 수업 형태로 적용하였다. 모둠 활동 영상, 시뮬레이션 조작 영상, 활동지 기록을 분석한 결과, 학생들은 반복실험 결과에서 조건부 상대도수, 상대도수의 극한, 이론적 확률을 구하는 빈도적 접근을 통해 조건부확률 개념을 구성할 수 있었다. 학생들은 빈도 수형도를 통해 문제 상황을 이해하고 확률 추론에 관한 의사소통을 하였으며 시뮬레이션과 큰 수의 법칙을 이용하여 이론적 확률을 점검하였다. 빈도적 관점의 도입 활동에서 학생들의 추론 특성과 교수·학습에 관한 유의점을 제시하였다. 교육과정에서 조건부확률을 빈도적 관점으로 도입할 것을 제안하였으며 구체적인 교과서 구현 방안을 제시하였다.

핵심어: 조건부확률, 빈도적 관점, 자연빈도, 수형도, 시뮬레이션

The purpose of this study is to propose and discuss the pedagogical idea of introducing conditional probability with the relative frequency approach. This study developed a learning activity and simulation using the frequency tree diagram and implemented them. The first-year high school students (n=14) were able to construct the concept of conditional probability through a frequency perspective of sequentially obtaining the conditional relative frequency, the limit of the relative frequency, and the theoretical probability. The implications for teaching and curriculum were presented.

Keywords: conditional probability, relative frequency approach, natural frequency, tree diagram, simulation

Received: April 1, 2021 **Revised:** April 26, 2021 **Accepted:** April 29, 2021

†Correspondence: Inyong Choi, naru84@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9766-9952>

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>), which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
Copyright © The Korea Society of Educational Studies in Mathematics

I. 서론

조건부확률은 의학, 과학 및 법률 분야의 중요한 딜레마뿐 아니라 일상생활이나 매체에서 접하는 정보를 해석하는데 요구되는 통계적 소양의 중요 요소로 학생들이 조건부로 가득 찬 세상에서 잘 살아가기 위해 반드시 필요한 개념이다(Watson & Kelly, 2007). 그러나 조건부확률은 학생들이 확률 영역 중에서도 특히 어려워하는 개념 중 하나이며(Lee & Woo, 2009), 학생뿐 아니라 대학생, 예비교사, 현직교사도 다양한 오개념을 가지고 있을 수 있다(Authors, 2019, 2020; Díaz & Batanero, 2009; Fischbein & Schnarch, 1997; Gras & Totohasina, 1995; Lee & Woo, 2009). 일반적으로 조건부확률은 다양한 맥락과 함께 제시되는데, 학생들은 맥락으로부터 조건사건과 목적사건을 파악하는 데 어려움을 겪기도 하고(Shaughnessy, 1992), 맥락에 포함된 인과관계, 시간관계 등에 의해 조건부확률의 가역성을 이해하지 못하기도 한다(Gras & Totohasina, 1995). 조건부확률의 정의가 문제 상황에 따라 서로 다른 방식으로 적용되는 특성도 학생들의 어려움을 가중한다(Cho, 2010). 이에 많은 학생들이 문제 유형을 암기하고 공식을 기계적으로 적용한다(Lee & Woo, 2009).

학교수학에서 조건부확률은 조건사건에 의해 변화된 표본공간에서의 경우의 수의 비율을 이용한 고전적 관점으로 도입된다. 우리나라도 확률 개념의 경우 빈도적 관점과 고전적 관점을 연결하여 도입하지만, 조건부확률은 고전적 관점으로만 도입하고 있다(Ministry of Education, 2015). 그러나 고전적 관점은 등확률인 유한 표본공간에서만 성립하며 연속이거나 근원사건의 가능성이 동일하지 않은 표본공간에서는 성립하지 않는다는 측면에서 수학적 한계를 갖는다(Batanero & Sanchez, 2005). 지도의 측면에서도 집합과 조합론에 기초한 고전적 관점은 조건부확률을 현실적 사고와 멀어지게 하고 확률 값의 계산을 강조한다는 비판을 받아왔다(Lee & Woo, 2009; Watson & Moritz, 2002). 반면, 빈도적 관점은 상대도수의 극한만 존재하면 조건부확률이 정의될 수 있으며, 확률을 실제적인 자료 및 통계적 추론과 연결시킨다는 측면에서 고전적 관점의 한계를 보완할 수 있다(Batanero & Borovcnik, 2016; Lee, 2005). Woo (2017)는 조건부확률의 빈도적 관점을 다루고 고전적 관점과의 관련성을 다루어야, 경우의 수를 바탕으로 한 조합론적 지도의 확일성을 탈피할 수 있으며, 자연스러운 사고방식으로 지도할 수 있다고 제안하였다. 그러나 빈도적 관점에서 조건부확률의 도입에 관해 교수·학습 과정을 설계하거나 실제 수업에서 학생들의 추론 과정을 분석한 연구는 이루어지지 않은 실정이다.

한편, 상술하였듯 조건부확률과 관련하여 학생, 성인들이 많은 어려움을 겪는 바, 조건부확률 문제 상황의 이해, 추론, 계산을 돕는 정보 제시 방식 및 표현에 대한 연구들이 심리학계, 수학교육계에서 다수 수행되었다(McDowell & Jacobs, 2017). 특히 여러 연구에서 빈도를 수형도와 함께 제시하는 것(이하 빈도 수형도)이 학생들의 조건부확률 추론을 돕는다는 것을 보고하였다(eg., Sedlmeier & Gigerenzer, 2001; Zhu & Gigerenzer, 2006). 그러나 이러한 연구는 주로 조건사건이 나중에 일어나는 베이즈 확률만을 다루었으며, 정답률을 이용하여 정보 제시 방식의 효과를 양적으로만 비교했다는 한계가 있다. 빈도 수형도가 베이즈 확률의 문제해결을 지원하는 실용적인 표현임은 충분히 검증되었다고 할 수 있으나, 실제 교수·학습 상황에서의 교육적 활용에 대해서는 별도의 실증적인 연구가 필요하다(Borovcnik, 2012). 본 연구에서는 빈도 수형도가 빈도적 관점에서 처음 조건부확률에 대해 추론하는 학생들을 지원할 수 있을 것이라는 기대 하에 이를 도입 활동의 구성에 활용하였다.

컴퓨터 시뮬레이션은 수업에서 많은 수의 반복실험을 빠르게 실행하고 자료의 분석에 집중할 수 있게 함으로써 확률 학습을 촉진하며, 확률에 대한 잘못된 추론을 극복할 수 있도록 돕는다(Chance, Ben-Zvi, Garfield, & medina, 2007; NCTM, 2000). 시뮬레이션을 통해 조건부확률 문제 상황에 숨겨진 가정들을 드러내게 하는 것이 조건부확률

의 이해나 오개념의 교정에 유용하게 활용될 수 있음을 제언한 연구가 있으나(Shaughnessy, 1992; Tarr & Lannin, 2005), 실제로 조건부확률 학습에 시뮬레이션을 활용한 연구는 드물다. 시뮬레이션은 충분한 반복실험을 통해 상대 도수의 극한에 가까운 값을 교실에서 관찰할 수 있게 한다는 측면에서 빈도적 관점의 조건부확률 도입에도 유용하게 활용될 수 있을 것이다. 이에 본 연구에서는 시뮬레이션을 활용하여 조건부확률을 빈도적 관점으로 도입하는 활동을 고안하고, 학생들의 추론을 분석하였다.

정리하면, 본 연구는 조건부확률에 대한 고전적 접근에 대한 문제의식으로부터 출발하여 그 한계를 보완할 수 있는 방법으로 빈도적 관점에 주목하였다. 빈도적 관점의 필요성에 대해 제언을 한 연구는 일부 있으나 이에 관한 실증적인 연구가 부족한 실정인 바, 본 연구는 조건부확률 학습 및 빈도적 관점과 관련된 선행연구를 바탕으로 빈도적 관점에서의 조건부확률 도입 활동을 고안하고, 고안한 활동을 적용한 실제 수업에서 고등학교 1학년 학생들의 추론 과정 및 어려움을 분석하는 것을 목적으로 하였다. 이를 통해 조건부확률을 빈도적 관점에서 접근하는 구체적인 방안을 제시하고, 학생들의 추론 사례를 분석함으로써 빈도적 관점에서의 조건부확률의 교수·학습에 관한 시사점을 제공하고자 하였다. 연구 문제는 다음과 같다.

· 빈도적 관점의 도입 활동에서 학생들이 조건부확률 개념을 구성하는 과정은 어떠한가? 이 때 나타나는 학생들의 추론 특성 및 어려움은 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 조건부확률 개념의 복잡성

1) 조건부확률에 대한 관점

조건부확률 개념은 크게 고전적 관점, 빈도적 관점, 주관적 관점¹⁾으로 설명될 수 있다(Batanero & Borovcnik, 2016). 고전적 관점을 바탕으로 한 조건부확률의 도입은 Table 1(A)와 같이 집합을 이용한 조합론적 논의로부터 출발하여 조건부확률을 정의하는 방식을 말한다. 2015 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education, 2015)에서 조건부확률의 도입에 관한 특별한 교수·학습 방법 및 유의사항을 제시하지 않고 있음에도 불구하고 우리나라의 총 9종의

Table 1 Classical approach to conditional probability

(A) 고전적 관점에서 조건부확률의 정의	(B) 고전적 관점이 적용되지 못하는 예
<p>각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여, 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 다음과 같다.</p> $P(B A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$	<p>재이는 우산을 가지고 실내에 들어갔다 나올 때, 세 번 중 한 번 꼴로 우산을 잃어버린다. 어느 날 재이가 우산을 가지고 학교, 도서관, 체육관을 차례로 들렀다가 우산을 잃어버리고 집으로 돌아왔다. 이때 우산을 도서관에서 잃어버렸을 확률을 구하시오.</p>

이 식의 우변의 분자와 분모를 각각 $n(S)$ 로 나누면

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

1) 주관적 관점은 본 연구의 초점을 벗어나므로 이론적 배경에서 다루지 않았다.

<확률과 통계> 교과서 중 8종이 고전적 관점을 택하여 조건부확률을 도입하고 있다. 1종(Lee et al., 2018)은 조건부 확률의 정의를 먼저 직접 제시한 후 각 근원사건의 확률이 모두 같은 표본공간 S 에서는 분모 분자를 $n(S)$ 로 나누면 $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 와 같이 나타낼 수 있음을 설명한다.

조건부확률 $P(B|A)$ 의 수학적 정의는 $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 이며, $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 이 아니다(Kolmogorov, 1956). 각 근원사건이 일어날 가능성이 동등한 유한 표본공간에서만 제한적으로 $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있다. 연속적인 표본공간이나 근원사건의 확률이 동일하지 않은 경우에는 이러한 방법이 적용되지 않는다(Batanero & Sanchez, 2005). 예를 들어 우리나라 교과서에서 흔히 볼 수 있는 유형의 문제인 Table 1(B)를 살펴보면 우산을 학교, 도서관, 체육관에서 잃어버리는 사건을 각각 A, B, C , 우산을 잃어버리는 사건을 E 라 했을 때, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}=\frac{2}{9}$, $P(C)=\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}=\frac{4}{27}$, $P(E)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{19}{27}$ 이 성립한다. 이때, 우산을 도서관에서 잃어버렸을 조건부확률은 $P(B|E)=\frac{P(B \cap E)}{P(E)}=\frac{P(B)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{27}}=\frac{6}{19}$ 으로 구할 수 있다. 이러한 문제는 근원사건의 가능성이 동일하지 않으므로 고전적 관점이 적용되지 않는다. 우리나라 학생들은 고전적 관점을 통해 도출한 조건부확률의 정의를 그것이 적용되지 않는 문제 상황에 대해서도 단순히 공식을 외워서 적용하고 있는 것이다.

한편, 빈도적 관점²⁾에서 확률은 상대도수의 극한으로 정의된다. 우리나라 중학교 교육과정에서는 확률의 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 지도하도록 하고 있으며, 고등학교에서도 통계적 확률과 수학적 확률을 연결지어 지도한다(Ministry of Education, 2015). 그러나 조건부확률에 있어서는 빈도적 관점이 다루어지지 않는다. 빈도적 관점에서 조건부확률의 정의는 Table 2와 같은 방식으로 설명될 수 있다.

고전적 관점은 동등한 가능성을 가지지 않는 표본공간이나 가능성의 경우가 무한인 경우에 확률을 구하지 못하는 반면, 빈도적 관점은 상대도수의 극한이 존재한다면 확률값을 얻게 되므로 고전적 관점의 제한점을 보완할 수 있다(Batanero & Sanchez, 2005; Lee, 2005). 실제로 Table 2와 같이 상대도수의 극한을 이용하여 조건부확률의 일

Table 2 Frequency approach to conditional probability

빈도적 관점에서 조건부확률의 정의

n 번의 반복시행에서 사건 A 가 일어난 횟수를 n_A , 사건 A 와 사건 B 가 동시에 일어난 횟수를 $n_{A \cap B}$ 라 하면, 사건 A 가 일어났을 때, 사건 B 가 일어난 상대도수는

$$\frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{\frac{n_{A \cap B}}{n}}{\frac{n_A}{n}}$$

이다. 이때, 시행횟수 n 이 한없이 커지면, $\frac{n_A}{n} \rightarrow P(A)$, $\frac{n_{A \cap B}}{n} \rightarrow P(A \cap B)$ 이므로 $\frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{\frac{n_{A \cap B}}{n}}{\frac{n_A}{n}} \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

따라서 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은 다음과 같이 정의한다.

$$P(B|A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{단, } P(A)>0)$$

2) 종종 $n=100$ 인 표본에 기초한 빈도 형식의 표를 이용한 도입을 빈도적 접근이라고 표현하는 경우가 있다. 본 연구에서 의미하는 빈도적 접근은 무작위 실험의 반복시행에서 상대도수의 극한을 이용하는 것을 의미한다.

반적 정의를 도입하면, Table 1(B)와 같은 문제에 대하여 고전적 관점에서 발생하는 문제가 나타나지 않는다. Woo (2017)는 조건부확률의 빈도적 관점을 다루고 고전적 관점과의 관련성을 다루어야, 경우의 수를 바탕으로 한 조합론적 지도의 확일성을 탈피할 수 있으며, 자연스러운 사고방식으로 지도할 수 있다고 주장하였다. 이에 본 연구에서는 빈도적 관점을 이용하여 학생들이 점진적으로 조건부확률의 정의를 구성해나갈 수 있는 도입 활동을 고안하고, 학생들의 추론을 살펴보고자 하였다. 특히 Table 2를 보면 빈도적 관점에서 조건부확률의 정의는 크게 반복시행의 결과로 나타나는 빈도를 이용하여 조건부 상황의 가능성을 상대도수로 나타내는 과정과 상대도수를 이용하여 이론적 확률³⁾을 도출하는 과정으로 구분할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 언급한 두 과정에 초점을 두어 도입활동을 구성하였으며, 학생들의 추론 과정을 분석하였다.

2) 해법의 다양성

조건부확률의 정의는 하나이지만, 문제 상황의 특성에 따라 확률을 구하는 효율적인 방법이 다르다. 조건부확률을 구하는 방법은 Table 3과 같이 질적 변화 인식, 고전적 정의 사용, 일반적 정의 사용으로 분류할 수 있다.

질적 변화 인식은 조건사건을 반영하여 새로운 표본공간을 구성한 후 수학적 확률을 계산하는 것이며, 고전적 정의 사용은 표본공간에서 조건사건을 만족하는 부분집합을 새로운 표본공간으로 보고 수학적 확률을 계산하는 방법이다(Cho, 2010). 일반적 정의 사용은 두 확률의 비로서 조건부확률의 정의를 직접 사용하는 방법을 말한다. 이 세 가지 방법은 수학적으로 모두 동치임을 보일 수 있지만, 문제 상황이나 정보 제시 방식에 따라 각 방법의 효율성이 다르거나 적용이 불가능한 방법이 존재한다. 학교수학에서 다루는 간단한 조건부확률 문제 상황은 크게 순차적(diachronical) 상황과 동시적(synchronical) 상황으로 구분할 수 있다(Batanero & Sanchez, 2005; Cho, 2010; Watson, 2005). 순차적 상황은 연속적인 추출 실험에 관한 것이며 동시적 상황은 주로 정적인 속성에 관한 것이다.

Table 3 Different methods of solving conditional probability

방법	질적 변화 인식	고전적 정의 사용	일반적 정의 사용
문제에서	[순차적 상황] 주머니에 빨간 공이 3개, 파란 공이 2개 들어있다. 영희와 철수가 주머니에서 공을 1개씩 차례로 뽑는다. 영희가 빨간 공을 뽑았을 때, 철수가 파란 공을 뽑을 확률을 구하시오.	[동시적 상황] 한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나왔을 때, 이것이 6의 약수일 확률을 구하시오.	[역확률 상황] 어떤 병에 걸릴 확률이 0.10이라 하자. 이 병을 진단하는 검사의 정확도는 '실제로 병이 있는 경우 양성으로 진단할 확률'이 95%이고, '실제로 병이 없는 경우에 음성으로 판정할 확률'이 99%이다. 이 검사에서 양성이라고 판정받은 사람이 실제로 병에 걸렸을 확률을 구하시오.
해법	영희가 빨간 공을 뽑았으므로 주머니 안에는 빨간 공 2개, 파란 공 2개가 남아있다. 따라서 철수가 파란 공을 뽑을 확률은 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 가 된다.	표본공간을 S, 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면 $P(B A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{3}$	병에 걸린 사람이 양성판정을 받을 확률은 0.1×0.95 병에 걸리지 않은 사람이 양성판정을 받을 확률은 0.9×0.01 따라서 구하고자하는 확률은 $\frac{0.1 \times 0.95}{0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.01} = \frac{95}{104}$

3) 본 고에서 이론적 확률 또는 이론적 모델은 표본공간에 기초한 수학적 확률 또는 이러한 수학적 확률을 이용하여 계산한 확률을 의미한다.

Table 3에서 볼 수 있듯이 순차적 상황은 질적 변화 인식이 효과적이며, 동시적 상황은 고전적 정의의 사용이 효과적이다(Cho, 2010). 그 외에 동시적 상황이지만 정보가 비율로 제시된 경우, 사건의 시간관계 또는 인과관계가 역순인 역확률 상황 등은 질적 변화 인식이나 고전적 정의의 사용보다는 일반적 정의를 사용하는 것이 효율적이다.

우리나라 교육과정과 교과서는 조건부확률을 구하는 이러한 다양한 방법을 명시하지 않은 채 암묵적으로 지도하고 있다. 조건부확률 단원에서는 고전적 접근으로 정의를 유도한 후 일반적 정의를 사용하는 문제를 주로 다루다가, 후속단원인 확률의 곱셈정리나 종속과 독립 단원에서는 어느 순간부터 순차적 상황에 대한 조건부확률을 질적 변화를 인식하여 간단히 구한다(eg., Kim et al., 2018). 문제 상황마다 조건부확률의 정의를 적용하는 방식이 다른 것은 학생들이 조건부확률을 어려워하는 주요 원인 중 하나이며(Cho, 2010), 학생들은 문제 유형을 복원, 비복원, 순행, 역행 등으로 분류하고 해법을 암기하기도 한다(Lee & Woo, 2009). 따라서 조건부확률을 구하는 다양한 방법을 소개하고 이러한 방법들이 본질적으로는 모두 조건부확률의 일반적 정의로 통합되어 설명될 수 있음을 이해할 수 있도록 학생들을 지도할 필요가 있다.

2. 조건부확률의 교수·학습에 관한 선행연구

본 연구는 빈도 수형도와 시뮬레이션을 활용하여 조건부확률을 빈도적 관점에서 도입하는 활동을 고안하고, 도입 활동에서 학생들의 추론을 분석하는 데 초점을 두었다. 이에 이 절에서는 조건부확률에 대한 학생들의 추론 특성, 어려움 및 오개념, 빈도 수형도와 시뮬레이션의 활용 등 조건부확률의 교수·학습과 관련한 선행연구를 살펴보고자 한다.

1) 조건부확률에 대한 학생들의 추론

Tarr & Jones (1997)는 조건부확률 개념에 대한 중학생들의 발달 수준을 4가지로 구분하여 설명하였다. 1수준은 주관적 수준으로 주관적 추론을 사용하여 조건부확률을 생각하는 것이다. 2수준은 주관적 사고와 초보적인 양적 사고의 과도기적 단계로 조건부확률을 구할 때 수치를 부적절하게 사용한다. 3수준은 비형식적인 양적 사고 수준으로 수치적 확률을 정확하게 다룰 수는 없지만 조건부확률을 결정하는 전략으로 상대도수, 비율 등을 적절하게 활용한다. 4수준은 수치적 추론 수준으로 조건부확률을 수치적으로 정확히 구할 수 있다. 이러한 수준은 항상 순차적이고 배타적인 것은 아니며 동시에 나타나거나 높은 수준에서 낮은 수준으로 돌아갈 수도 있다. 본 연구의 도입활동은 사건의 가능성을 상대도수로 표현하는 3수준에서 정확한 이론적 확률을 구하는 4수준으로 이행할 수 있도록 설계하였다.

조건부확률의 본질은 조건사건에 의해 변화된 표본공간에서의 확률이다. 그러나 여러 연구에서 학생들이 조건부확률 개념을 처음 학습할 때 비복원 상황에서 표본공간이 변한다는 사실을 인식하는 데 어려움을 겪으며, 표본공간의 모든 경우를 고려하지 못함을 보고하였다(Fischbein & Gazit, 1984; Jones, Langrall, Thornton, & Mogill, 1999). 조건부확률을 이미 학습한 고등학생의 경우 조건사건에 의해 변화되는 표본공간을 구성하면 간단히 해결할 수 있는 문제도 공식에 의존하여 해결하려는 경향이 나타나기도 한다(Lee & Woo, 2009). 따라서 학생들이 표본공간에 주목하도록 함으로써, 조건사건에 의한 표본공간의 변화를 인식하고 이를 사건의 확률과 연결할 수 있도록 지도해야 한다(Tarr & Lannin, 2005).

학생들이 처음 조건부확률 문제를 접할 때 “~ 때, ~일 확률”과 같은 관용적 표현의 조건문이 의미하는 상황을 정확히 이해하지 못할 수 있다(Shaughnessy, 1992). 복잡한 맥락에서 조건사건의 파악이나 조건사건과 목적사건의 구분 등 문제 이해에 어려움을 겪는 경우도 보고된 바 있다(Falk, 1986; Shaughnessy, 1992). 따라서 조건부확률의 지도

에 있어서 조건문의 형식과 의미에 익숙해지는 시간을 충분히 제공할 필요가 있다(Lee & Woo, 2009).

학생들은 조건관계를 시간순서와 연관시켜 나중에 발생하는 사건이 먼저 발생하는 사건의 조건사건이 될 수 없다고 생각하는 경향이 있는데, 이를 시간축 오개념(Falk, 1986)이라 한다. 나중에 일어난 사건이 조건사건이 되는 상황은 학생들에게 직관적으로 자연스럽지 않다. 따라서 학생들이 나중에 발생하는 조건사건이 목적사건에 영향을 줄 수 없다고 생각하고 단순히 목적사건의 확률을 구하는 경우가 많이 보고되었다(Lee & Woo, 2009; Watson & Kelly, 2007). 시간축 오개념과 유사하게 조건사건과 목적사건이 인과적인 관계에 있는 경우에 결과가 조건사건이 될 수 없다고 생각하는 인과적 오개념이 보고되기도 하였다(Falk, 1986; Gras & Totohasina, 1995; Lee & Woo, 2009). 시간축 오개념과 인과적 오개념은 문제상황에 포함된 맥락정보가 조건부확률의 가역성을 인식하기 어렵게 하는 것인데, 연령이 증가할수록 오개념이 더 심해지는 경향이 나타났다(Fischbein & Schnarch, 1997). 따라서 시간 순서와 조건관계는 서로 관련이 없음을 이해하고 조건관계를 인과관계와 구분할 수 있도록 지도할 필요가 있다(Lee & Woo, 2009).

한편, Gras & Totohasina (1995)는 학생들이 조건부확률 $P(A|B)$ 를 $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ 로 동일시하는 기수적 오개념에 대해 보고하였다. 이러한 학생들은 근원사건의 가능성이 동등하지 않은 표본공간에서도 고전적 정의로 조건부확률을 구한다(Falk, 1986). Batanero & Sanchez (2005)는 이를 지도 방식에 기인한 것으로 보았는데, 앞에서 살펴본 것처럼 고전적 관점으로 조건부확률을 정의하는 우리나라의 도입 방식은 기수적 오개념을 유발할 가능성이 있다.

학생들이 $P(A|B)$ 를 $P(B|A)$ 나 $P(A \cap B)$ 로 혼동하는 경우도 많다(Lee & Woo, 2009; Pollatsek et al., 1987; Watson & Moritz, 2002). 학생들은 조건부확률을 곱사건의 확률과 분리해서 생각하지 않고 문제 상황에 등장하는 두 사건의 확률을 단순히 곱하는 경우가 많았는데, 이는 조건문의 잘못된 해석이나 시간축·인과적 오개념의 영향으로 나타날 수 있다.

2) 조건부확률과 빈도 수형도

문제 상황에 대한 수치적 정보를 확률적 형태로 제시했을 때 보다 빈도 형태로 제시했을 때, 사람들이 베이지 역확률을 더 쉽게 이해하고 해결하였다(Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Watson & Moritz, 2002). 또한 빈도 정보를 2×2 표, 수형도 등으로 시각화하여 제공할 때가 단순히 문장제 형태로 제공할 때보다 사람들의 베이지 확률 정답률이 높았다(Binder, Krauss, & Bruckmaier, 2015). 수형도는 어떤 구조나 과정의 전체적인 상황과 개요를 효율적으로 제공하는 이상적 표현이다(Fischbein, 1987). 수형도는 점과 선으로 연결된 도형으로 표본공간을 직관적인 방식으로 시각화하여 나타낼 수 있는데, 수형도의 각 꼭짓점은 사건에 대응되며 자녀 꼭짓점은 부모 꼭짓점에 대한 배타적인 분할이다. 이러한 수형도의 계층구조와 분기구조는 조건부확률에서 학생들이 조건사건과 목적사건을 이해하는데 도움이 될 수 있다(Tomlinson & Quinn, 1997).

심리학자 기거렌처(Gigerenzer)는 여러 연구를 통해 수형도와 자연빈도⁴⁾를 결합한 시각적 표상(빈도 수형도)의 우수성을 강조해왔다(Sedlmeier & Gigerenzer, 2001; Zhu & Gigerenzer, 2006). Sedlmeier & Gigerenzer (2001)는 대학생을 대상으로 베이지 정리의 지도 방식에 따른 학습 효과를 비교하였다. 빈도 수형도를 이용하여 베이지 정리를 학습한 집단이 공식만을 이용하여 연습한 집단보다 단기 학습 효과와 장기적인 지속 효과 모두 우수했다. 또한 확률 수형도와 빈도 수형도를 비교했을 때, 단기적인 학습 효과에서는 작은 차이가 났지만, 3달 후에도 빈도 수형도는 여전히 90%이상의 정답률을 유지한 반면 확률 수형도는 50%까지 정답률이 하락했다.

4) 기거렌처는 상대도수(relative frequency)와 구분되는 개념으로서 자연빈도(natural frequency)라는 표현을 사용하였다(Gigerenzer & Hoffrage, 1995).

Zhu & Gigerenzer (2006)는 초등학교 4, 5, 6학년 학생들에게 Figure 1과 같은 빈도 수행도를 문제와 함께 제공했을 때, 학생들이 베이지 역확률, 즉 '빨간 코인 사람을 만났을 때, 그 사람이 거짓말을 할 확률'을 어떻게 추론하는지에 대해 분석하였다.

일반적인 문장제 형태로 제시했을 때 학생들의 정답률은 0%에 가까웠지만, 빈도 수행도를 제공했을 때 4, 5, 6학년의 정답률은 각각 19, 39, 53%로 상승하였다. Figure 1에서 학생들의 추론 유형은 크게 $\frac{b}{a}$, $\frac{d+f}{a}$, $\frac{d}{b}$, $\frac{b}{d+f}$, $\frac{d}{d+f}$ 의 다섯가지로 나타났다. $\frac{b}{a}$ 는 조건사건을 고려하지 않은 채 전체를 기준으로 목적사건의 확률 $\frac{10}{100}$ 로 추론하는 것이다. 반면, $\frac{d+f}{a}$ 는 목적사건을 고려하지 않은 채 전체를 기준으로 조건사건의 확률 $\frac{8+9}{100}$ 로 추론하는 것이다. 이는 성인들에게서는 나타나지 않은 유형이다(Gigerenzer & Hoffrage, 1995). $\frac{d}{b}$ 는 분모, 분자를 바꾸어 목적사건을 분모, 조건사건을 분자로 두고 $\frac{8}{10}$ 로 추론하는 것이다. $\frac{b}{d+f}$ 는 조건사건에 대응되는 빈도를 바르게 분모로 선택하였지만 분자에 약간의 오류가 있는 경우로 베이지 추론에 거의 근접한 사고이다. 마지막으로 $\frac{d}{d+f}$ 는 베이지 역확률을 바르게 추론한 것이다. 초등학교 6학년의 경우 $\frac{b}{a}$, $\frac{d+f}{a}$, $\frac{b}{d+f}$ 로 응답한 비율이 차례로 2%, 6%, 11%로 나타났으며 $\frac{d}{b}$ 는 나타나지 않았다. 그러나 이들은 학생들의 응답 유형을 양적으로 분류하였을 뿐 그러한 추론이 나타나는 원인에 대해서는 분석하지 않았다.

기저렌처의 일련의 연구들은 빈도 수행도가 학생들의 직관적인 베이지 추론을 돕는 효과적인 표상임을 뒷받침한다. 그러나 이는 문제 해결 관점에서의 유용성에 대한 검증이며, 실제 조건부확률의 교수·학습에서의 활용에 대해서는 보다 많은 연구와 분석이 필요하다(Borovcnik, 2012). Table 2에서 보았듯이 빈도적 관점은 조건부 상황의 가능성을 상대도수로 표현하는 과정으로부터 출발하는 바, 빈도 수행도가 학생들의 조건부 상대도수 추론을 지원할 것이라는 기대 하에 이를 도입 활동의 핵심 표현으로 활용하였다. 특히 상대도수의 유형과 구성 과정에 초점을 두어 조건부 상황의 가능성을 표현하기 위한 학생들의 추론을 살펴보고자 하였다.

Figure 1 Frequency tree diagram (Zhu & Gigerenzer, 2006, p. 3.)

3) 조건부확률 학습에서 시뮬레이션의 활용

확률은 동일한 조건에서 수없이 반복된 실험이나 현상의 결과를 모델링 한 결과물이라 할 수 있다(Eichler & Vogel, 2014). 확률에 대한 학습은 실제 자료에 대한 예측과 설명을 중심으로 이루어져야 학생들의 확률 개념이 실제 관찰할 수 있는 현상과 단절되지 않는다(Konold & Kazak, 2008). 컴퓨터 시뮬레이션은 교실에서 빠른 시간 안에 실제 자료를 생성하고 탐구할 수 있게 한다(NCTM, 2000). 시뮬레이션을 통해 학생들은 통계적 확률과 수학적 확률 사이의 상호작용을 경험하고 이해할 수 있으며(Biehler, 1991; Stohl & Tarr, 2002), 일상생활에서 경험하기 힘든 동일한 조건의 무수히 많은 반복실험의 결과를 확인함으로써 오개념이나 잘못된 직관을 수정할 수 있다(Wilensky, 1997).

대부분의 연구들이 큰 수의 법칙의 이해를 증진시키기 위한 관점에서 시뮬레이션을 활용하였지만(eg, Ireland & Watson, 2009; Lee & Cho, 2015), 시뮬레이션은 확률 모델링 활동에서 이론적 모델에 대한 평가와 점검을 하는 가장 기초적인 수단 중 하나로도 활용될 수 있다(Chaput, Girard & Henry, 2011). 시뮬레이션 결과에 대한 통계적 관측을 통해 이론적인 확률 모델을 검증하기 위해서는 큰 수의 법칙에 대한 정확한 이해가 필요하다. 시행횟수가 충분히 크면 상대도수가 이론적 확률과 정확히 같아진다고 생각하거나(Lee & Cho, 2015), 소위 ‘작은 수의 법칙’이 성립한다고 믿고 적은 시행횟수의 시뮬레이션 결과를 활용하는 경우(Tarr & Lannin, 2005)와 같이 변이성에 대한 이해가 부족한 상황에서는 시뮬레이션을 이용하여 모델에 대한 정확한 판단을 내릴 수 없기 때문이다. 일부 연구에서는 학생이 시뮬레이션을 신뢰하지 않아 이론적 모델과 시뮬레이션의 결과가 다른 경우에도 자신의 계산 결과를 믿고 점검과 반성의 과정으로 이어지지 않는 경우가 보고된 바 있다(Authors, 2017; Maxara & Biehler, 2006; Yáñez, 2002). 따라서 컴퓨터 상의 시뮬레이션이 현실 세계의 확률 실험과 연결될 수 있다는 점을 충분히 인식시키는 과정이 선행될 필요가 있다(Ireland & Watson, 2009).

몇몇 연구에서는 시뮬레이션을 통해 조건부확률 문제 상황에 숨겨진 가정들을 드러내게 하는 것이 조건부확률의 이해나 시간축 오개념과 같은 오개념의 교정에 유용하게 활용될 수 있음을 주장하였다(Shaughnessy, 1992; Tarr & Lannin, 2005). 그러나 일반적인 확률이 아닌 조건부확률의 학습에 시뮬레이션을 활용한 연구는 Yáñez (2002)를 제외하면 거의 찾아볼 수 없다. 본 연구에서는 학생들이 시뮬레이션을 활용하여 상대도수의 극한으로서 조건부확률을 구하고 자신들의 이론적 모델을 점검할 수 있도록 도입활동을 고안하였다.

III. 연구 방법

본 연구에서는 사례 연구 방법을 사용하였는데(Stake, 1995), 연구참여자들의 추론 과정을 수업 동영상, 활동지 기록 등의 자료를 바탕으로 심층적으로 분석하여 조건부확률의 빈도적 도입에 관한 가능성을 평가하고 다양한 논점과 시사점을 도출하는 데 적합하다고 판단하였기 때문이다. 본 연구에서는 다음과 같은 절차로 도입 활동의 고안, 연구 참여자 선정, 사례에 대한 자료의 수집, 분석이 이루어졌다.

1. 연구 절차

본 연구의 전체적인 절차는 Figure 2와 같이 4단계로 구분할 수 있다. 첫째, 문헌 연구 및 선행연구 분석을 토대로 도입 활동을 고안하였다. 둘째, 학생과 교사를 섭외하고 학생의 학년, 수업 시간 등의 조건을 고려하여 도입 활동을

적용하는 수업을 설계하였다. 수업 지도안과 수업 진행용 프레젠테이션을 작성한 후 교사에게 공유하였으며 수업에 관해 질의 응답하는 2차례의 대면 회의를 통해 수정 보완하였다. 본 연구의 목적은 학생들이 빈도적 관점에서 조건부 확률 개념을 점진적으로 구성해나가는 과정을 살피보기 위한 것이므로, 교사에게 직접 답을 알려주기 보다는 학생들의 추론과 토론을 촉진해줄 것을 요청하였다. 셋째, 수업을 실시하고 자료를 수집하였다. 넷째, 수집한 자료를 분석하고 시사점을 도출하였다. 연구 절차의 각 단계에 관한 세부 사항은 후속 절에서 자세히 설명하였다.

2. 연구참여자

수도권 소재 일반계 P고등학교의 1학년 학생 14명(남 11명, 여 3명)을 대상으로 고안한 활동을 적용하였다. 이들은 수학 정규동아리 부원으로 수학에 대한 흥미와 관심이 높고 수학 성취도가 중상인 학생들이었다. 2명의 학생(s13, s21)은 당일 교내대회 참가로 인해 후반부 수업에 참가하지 못하였다. 2015 개정 교육과정 공통 과목 <수학>에서는 경우의 수만 다루므로 이 학생들은 중학교 2학년 때 확률을 배운 이후로 확률에 대해 학습한 경험이 없었다. 사전 조사를 통해 모든 연구참여자가 조건부확률 개념에 대한 선행학습을 하지 않았음을 확인하였다. 수업을 담당한 교사는 동일학교의 1학년 <수학> 과목 지도 교사이자 동아리 지도 교사로, 일반계 고등학교 근무 경력이 12년이었다. 모든 연구참여자로부터 연구 참여에 대한 동의를 받았다.

3. 조건부확률 도입 활동

조건부확률에 관한 선행연구와 빈도적 관점에서 조건부확률의 정의(Table 2)를 고려하여 도입 활동을 구성하였다. 학생들에게 조건부확률의 정의를 부여하는 것이 아니라, 비복원 상황의 반복시행 결과에서 조건부 상황의 가능성을 하나의 수치로 표현하는 과정을 통해 점진적으로 조건부확률을 형식화하고자 하였다. 시뮬레이션을 이용하여 학생들에게 실제 자료를 다룰 수 있는 기회를 제공하고, 상대도수와 이론적 확률을 연결할 수 있도록 하였다. 특히 시뮬레이션 결과를 빈도 수형도(Zhu & Gigerenzer, 2006) 형태로 제시하여 학생들의 조건부확률 추론을 지원하고자 하였다. 비복원 상황을 이용하여 조건부확률의 복합적인 측면(변화된 표본공간에서 경우의 수의 비율, 확률의 비율, 고전적 관점에서 경우의 수의 비율)을 경험하고 연결할 수 있도록 구성하였으며(Borovcnik & Bentz, 1991), 조건사건이 나중에 일어난 경우를 포함하여 시간축 오개념이 발생하지 않도록 하였다(Lee & Woo, 2009). 본 연구에서 고안한 도입 활동의 전체 경로는 Figure 3과 같다.

빈도적 관점에서의 조건부확률 도입을 위한 수업모형을 1) 조건부 상황의 가능성을 상대도수로 표현하기, 2) 시뮬레이션으로 시행횟수가 충분히 클 때의 상대도수(경험적 확률⁵⁾) 구하기, 3) 시뮬레이션으로 구한 경험적 확률을 이론

Figure 2 Research process

5) 본고에서는 시뮬레이션을 이용하여 구한 시행횟수가 충분히 클 때의 상대도수를 $n=500$ 인 상대도수와 구분하여 경험적 확률로 표현하였다.

Figure 3 The steps of the Introducing Activity of conditional probability in frequency approach

Figure 4 Frequency tree diagram simulation

적으로 설명하기의 3단계로 고안하여 활동1과 활동2에 각각 적용하였다. 활동1에서는 조건사건이 먼저 일어난 상황을 다루고, 활동2에서는 조건사건이 나중에 일어난 상황을 다룬다. 활동1에서는 표본공간의 질적 변화를 인식하여 조건부확률을 구하는 이론적 방법을 상대도수와 연결하고 활동2에서는 두 확률의 비를 이용하여 조건부확률을 구하는 이론적 방법을 상대도수와 연결한다. 마지막 활동3은 형식화 단계로 조건부확률의 용어, 기호, 정의를 도입하고 고전적 관점 등 다양한 측면을 연결한다.

1) 빈도 수형도 시뮬레이션

Figure 4는 본 연구의 활동에서 사용한 시뮬레이션 화면⁶⁾이다. 연구자가 지오지브라 스크립트로 프로그래밍하여

6) <http://bit.ly/2O9uh2c> 에서 직접 실행해볼 수 있다.

직접 개발한 것으로 PC, 스마트폰, 태블릿 등 웹 브라우저가 실행되는 모든 단말기에서 실행할 수 있다.

주머니에서 두 사람 A와 B가 공을 차례로 뽑는 비복원 추출을 1번, 100번 단위로 반복하거나 계속 실행할 수 있다. 선행연구(Gigerenzer & Hoffrage 1995; McDowell & Jacobs, 2017)에서 효과를 보고한 빈도 수형도 형태로 확률 시뮬레이션의 결과가 시각화되도록 구성하였다. 특히 학생들이 7개의 빈도 중 원하는 것을 분모 또는 분자로 선택하여 상대도수를 구성하고 실시간으로 그 변화를 관찰할 수 있게 설계하였다. 예를 들어 Figure 4는 시행을 1309번 반복한 순간의 'B가 파란 공을 뽑았을 때, A가 빨간 공을 뽑은 조건부 상대도수' $\frac{400}{400+376}=0.52$ 를 나타내고 있다.

2) 활동1: 조건사건이 먼저 일어난 조건부 상황

학생들은 조건부 상황에 따라 확률이 변화하는 과정을 경험할 수 있어야 한다(Lee, 2005; Woo, 2017). 활동1의 1~5번은 학생들이 여러 가지 사건의 가능성을 상대도수로 나타내고, 그 과정에서 조건사건에 따라 목적사건이 일어날 가능성이 변화할 수 있음을 인식시키기 위한 목적으로 설계하였다. 처음으로 조건이 등장하기 때문에 조건사건이 목적사건보다 먼저 일어나는 상황만을 다루었다. 1, 2번은 조건이 없는 단순사건의 상대도수를 묻는 문항으로 전체 시행횟수 중 각 사건이 일어난 횟수의 비율을 구하면 된다. 반면, 3, 4번에서는 조건사건이 일어난 상황에서 목적사건이 일어날 가능성을 나타낼 수 있는 상대도수를 묻는다. 여기서 학생들이 조건사건을 만족시키는 일부의 시행만을 새로운 전체로 보고 목적사건의 비율을 고려하는 비율 추론을 경험하길 기대하였다. 5번에서는 2번과 3번, 3번과 4번이 목적사건이 동일함에도 불구하고 가능성, 즉 상대도수가 다른 이유를 명시적으로 질문함으로써 학생들이 조건의 유무나 조건의 변화에 따라 목적사건의 확률이 변할 수 있음을 인식할 수 있도록 하였다(Figure 5).

활동1의 6번은 앞에서 구한 조건부 상대도수⁷⁾를 조건에 의해 변화한 새로운 표본공간에서의 수학적 확률과 연결시키기 위한 것이다. 조건부확률은 새로운 확률이 아니라 조건사건에 의해 변화된 새로운 표본공간에서의 수학적 확률일 뿐이다. 학생들이 문제해결 방법으로 조건부확률 공식에만 의존하기보다는 조건사건에 의해 변화되는 표본공간의 질적인 변화를 인식하고 수학적 확률을 이용하여 조건부확률을 직접 구할 수 있도록 지도해야 한다(Cho, 2010; Lee & Woo, 2009; Tarr & Lannin, 2005). 6(1)에서는 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 시행횟수가 계속 증가할 때, 조건부 상대도수가 수렴하는 값으로서 조건부확률을 구하도록 하였다. 6(2)는 시뮬레이션을 이용하지 않고 조건부확률을 이론적으로 직접 구하는 방법을 생각하도록 유도하는 문항이다. 예를 들어, 시뮬레이션을 계속 실행하면 A가 빨간 공을 뽑았을 때, B가 파란 공을 뽑은 상대도수는 $\frac{3}{4}=0.75$ 에 가까워지는 것을 확인할 수 있다. 이는 A가 빨간 공을 먼저 뽑아 주머니에 빨간 공이 1개, 파란 공이 3개 남은 상황에서 무작위로 공을 뽑는 시행을 여러 번 반복했을 때, 파란 공이 나온 횟수의 비율이므로 새로운 표본공간 $\{\text{빨}_1, \text{파}_1, \text{파}_2, \text{파}_3\}$ 에서 공을 1개 뽑을 때, 파란 색이 나올 수학적 확률인 $\frac{3}{4}$ 과 같다. 이는 표본공간의 질적 변화를 인식하여 새롭게 표본공간을 구성하는 것으로 표본공간의 부분집합 A를 이용하는 $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 과는 다른 것이다⁸⁾.

3) 활동2: 조건사건이 나중에 일어난 조건부 상황

활동2의 전체적인 흐름은 활동1과 동일하나 나중에 일어난 사건이 조건인 역확률 상황을 다룬다는 차이가 있다. 역확률 상황은 시간축 오개념(Falk, 1986)의 예방과도 관련이 있다. 조건사건이 항상 먼저 일어나는 문제만을 다룬다

7) 본고에서는 조건부 가능성을 나타내는 상대도수를 조건부 상대도수로 표현하였다.

8) 수학적으로는 동치이다. 여기에서 다르다는 것은 추론 과정의 차이를 의미한 것이다.

Figure 5 Activity 1

[활동1] 500회 시물레이션 결과를 다시 적어놓고 다음 물음에 답해보자.

1. A가 파란 공을 뽑은 상대도수를 구해보자.
2. B가 파란 공을 뽑은 상대도수를 구해보자.
3. A가 먼저 빨간 공을 뽑은 상황에서, B가 파란 공을 뽑을 가능성을 나타낼 수 있는 상대도수를 구해보자.
4. A가 먼저 파란 공을 뽑은 상황에서, B가 파란 공을 뽑을 가능성을 나타낼 수 있는 상대도수를 구해보자.
5. 위에서 구한 2, 3, 4는 모두 B가 파란 공을 뽑은 상대도수이다. 각 상대도수의 값들이 서로 같은지 다른지 확인하고, 그 이유에 대해 적어보자.

① 2와 3은 (같다, 다르다) 이유:

② 3과 4는 (같다, 다르다) 이유:

6. 시행횟수를 500회, 1000회, 2000회, ... 늘려가면 3, 4에서 구한 상대도수는 각각 'A가 빨간 공을 뽑은 상황에서, B가 파란 공을 뽑을 확률'과 'A가 파란 공을 뽑은 상황에서, B가 파란 공을 뽑을 확률'로 가까이 갈 것이다.

(1) 시물레이션을 이용하여 시행횟수가 충분히 클 때의 상대도수의 값을 확인하여 아래 빈칸을 채워보자.

(※ 체크박스 기능을 이용하여 화면에 필요한 상대도수가 표시되도록 하자.)

A가 빨간 공을 뽑았을 때, B가 파란 공을 뽑은 상대도수

→

(시행횟수가 한없이 커지면)

① A가 빨간 공을 뽑았을 때, B가 파란 공을 뽑을 확률

A가 파란 공을 뽑았을 때, B가 파란 공을 뽑은 상대도수

→

(시행횟수가 한없이 커지면)

① A가 파란 공을 뽑았을 때, B가 파란 공을 뽑을 확률

(2) 각 사건의 확률 ①, ②를 여러 번의 시물레이션이나 실험을 하지 않고도, 주머니 속 공의 개수를 이용하여 직접 구하는 방법에 대해 적어보자.

① :

② :

면 학생들이 나중에 일어나는 사건은 조건이 될 수 없거나 조건이 되더라도 먼저 일어나는 사건에 확률적으로는 아무런 영향을 주지 못한다고 생각할 우려가 있다(Lee, 2005). 순서성이 명확히 드러나는 수형도에서 나중에 일어난 사건을 조건사건, 먼저 일어난 사건을 목적사건으로 두고 상대도수와 확률을 생각해 보는 경험은 조건부확률에서 시간 순서와 조건관계가 무관하다는 것을 이해하는데 도움이 될 수 있다(Binder et al., 2015). 이에 활동2의 1번에서는 B가 파란 공을 뽑았을 때 A가 빨간 공을 뽑았을 가능성을 나타내는 상대도수를 구하도록 하였다. Figure 1의 시물레이션 결과를 예로 들면 상대도수는 $\frac{376}{376+400}$ 이다(Figure 6).

이후 활동1과 동일하게 시물레이션을 이용하여 시행횟수가 충분히 클 때의 상대도수를 구하고 시물레이션을 하지 않고도 조건부확률을 구하는 방법을 생각하도록 구성하였다. 활동1과 달리 역확률 상황의 조건부확률은 표본공간의 질적 변화를 이용하여 직접 구하기 어려우므로 보다 일반적인 방법의 필요성이 자연스럽게 제기된다. 이에 학생들이 조건부 상대도수를 두 확률의 비와 연결시킬 수 있도록 유도하였다.

$$\frac{A와 B가 모두 파란 공을 뽑은 횟수}{B가 파란 공을 뽑은 횟수} = \frac{(A와 B가 모두 파란 공을 뽑은 횟수)/시행횟수}{(B가 파란 공을 뽑은 횟수)/시행횟수}$$

는 시행횟수가 한없이 커지면 큰 수의 법칙에 의해 $\frac{P(A와 B가 모두 파란 공을 뽑는 사건)}{P(B가 파란 공을 뽑는 사건)}$ 에 가까워지며, 이는 조건부확률의 정의 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 와 연결된다. 그러나 상대도수의 분모, 분자를 전체 시행횟수로 나누어 상대도수의 비율로 인식하는 과정은 학생들에게 자연스럽지 않다. 이에 조건부 상대도수를 두 상대도수의 비로 나타내는 과정을 2(2)번에서 보조문항 형태의 비계로 제공하고, 3번에서 학생이 스스로 큰 수의 법칙을 이용하여 확률의 비율에 도달할 수 있도록 구성하였다.

Figure 6 Activity 2

[활동2] 시뮬레이션을 500회 실행한 결과를 적고 다음 물음에 답하시오.

1. B가 뽑은 공이 파란 공일 때, B보다 먼저 공을 뽑은 A는 빨간 공을 뽑았을 수도 있고, 파란 공을 뽑았을 수도 있다. 시뮬레이션 결과에서 'B가 파란 공을 뽑았을 때, A도 파란 공을 뽑았을 가능성'을 나타낼 수 있는 상대도수를 구하시오.

2. 다음 물음에 답하시오.

(1) 시뮬레이션을 이용하여 시행횟수가 충분히 클 때의 상대도수의 값을 확인하여 아래 빈칸을 채워보자.
 (※ 체크박스 기능을 이용하여 화면에 필요한 상대도수가 표시되도록 하자.)

B가 파란 공을 뽑았을 때, A가 파란 공을 뽑은 상대도수	(시행횟수가 한없이 커지면)	B가 파란 공을 뽑았을 때, A가 파란 공을 뽑을 확률
----------------------------------	-----------------	--------------------------------

(2) 1.에서 상대도수를 구한 방법을 다음과 같이 분모, 분자를 시행횟수로 나눈 형태로 표현할 때 ㉠, ㉡에 들어갈 알맞은 사건을 적어보시오.

B가 파란 공을 뽑았을 때, A가 파란 공을 뽑은 상대도수	=	$\frac{(\text{㉠}) \text{ 횟수}}{(\text{㉡}) \text{ 횟수}}$	=	$\frac{(\text{㉢}) \text{ 횟수}}{\text{시행횟수}}$
----------------------------------	---	---	---	---

3. 2의 분수 표현을 참조하여 시뮬레이션으로 상대도수를 확인하지 않고도 'B가 파란 공을 뽑았을 때, A도 파란 공을 뽑았을 확률'을 구하는 방법을 찾아보자.

4) 활동3: 조건부확률의 형식화

활동3은 조건부확률 개념의 형식화 단계로, 용어 및 기호를 도입하고 활동2의 결과를 일반화하여 조건부확률의 정의를 소개한다. 또한 근원사건의 가능성이 동등한 표본공간 S 의 부분사건 A, B 에 대해서는 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 가 성립하므로 경우의 수의 비율로 조건부확률을 구할 수 있음을 소개함으로써 빈도적 관점과 고전적 관점을 연결한다. 심화학습으로 적공간 형태의 표본공간 구성활동(Cho, 2010)을 통해서 표본공간의 질적 변화를 고려한 직접 구하기 방법이 고전적 정의와 수학적으로 동치임을 확인하게 할 수도 있다.

4. 수업 실행

수업은 2020년 10월 23일 P고등학교 1학년의 등교수업 기간 중 정규 동아리 활동의 일환으로 쉬는 시간 없이 100분(2차시) 동안 이루어졌다. 당시는 코로나19 (COVID-19)가 일시적으로 진정되면서 사회적 거리 두기가 1단계로 하향 조정된 기간이었다. 수업 중 마스크 착용, 환기 등 방역수칙을 철저히 준수하여 수업을 진행하였다. 학생들이 오개념이나 잘못된 추론에 대해 논의하고 반성하며 조건부확률 개념에 대해 깊이 있게 이해할 수 있도록 촉진하고 (Jones et al., 1999; Tarr & Lannin, 2005), 학생들의 추론을 가시화시켜 분석의 대상으로 삼기 위하여 과제를 모둠별로 해결하는 기회를 제공하였다. Table 4는 연구참여자들의 코드 및 모둠 편성을 정리한 것이다.

활발한 사회적 상호작용을 유도하기 위하여 최대한 동일학급의 학생들을 한 모둠으로 편성하였다. 책상을 4개씩 붙여 모둠원끼리 모여 앉을 수 있도록 하였고, 모둠별로 시뮬레이션을 실행하기 위한 노트북을 1개씩 배치하였으며, 활동지는 개인별로 배부하였다. 교사는 교실 전면에 빔 프로젝터로 프레젠테이션과 시뮬레이션을 띄워 놓고 칠판과

함께 수업에 활용하였다. 연구자는 수업에 개입하지 않았으며, 수업 관찰 및 자료 수집에 집중하였다. 100분 동안 이루어진 수업 활동의 내용은 Table 5와 같다.

본 연구의 도입 활동은 상대도수, 상대도수와 이론적 확률 사이의 관계에 대한 이해를 필요로 한다. 고등학교 1학년인 연구참여자들은 중학교 2학년 이후로 학교 수업에서 2년간 상대도수나 확률을 다룬 적이 없었기 때문에 본격적인 활동에 앞서 중학교 2학년 확률 내용을 간단한 유인물과 함께 복습하였다. 동전 던지기 실험에서 상대도수의 정의, 시행횟수가 많아질수록 앞면이 나온 횟수의 상대도수가 0.5에 가까워지는 경향이 나타나며 이를 확률이라 한다는 것, 이 확률 0.5는 실험이나 관찰을 하지 않고도 경우의 수를 이용하여 구할 수 있다는 것을 복습하였다. 이후 수업에서 본격적으로 다룰 문제 상황으로 빨간 공이 2개, 파란 공이 3개 담긴 주머니에서 A, B가 차례로 공을 1개씩 뽑는 비복원 추출 상황에 대해 설명하였다. 특히, A와 B가 공을 1개씩 차례로 뽑는 것을 1회의 시행이라고 하고 이때는 공을 다시 넣지 않지만, 시행을 여러 번 반복할 때는 공을 다시 넣는다는 것을 강조하여 설명하였다. 이러한 시행을 빠르게 반복해줄 수 있는 도구로 컴퓨터 시뮬레이션을 소개하고, 빈도 수형도 형태로 제시되는 실험 결과를 해석하는 활동을 15분 간 진행하였다(NCTM, 2000). 이후 차례로 활동1, 활동2, 활동3을 진행하였다. 활동1의 1~5번, 활동1의 6~7번, 활동2의 1번, 활동2의 2~3번의 네 부분으로 나누어서 개인별 문제해결, 모둠 토론, 대표 모둠 발표, 교사의 정리 순으로 진행하였다. 시간적 제약으로 인해 활동2에서는 대표 모둠 발표를 생략하였으며, 활동3에서는 조건부확률 용어와 기호를 도입하는 부분을 간단히 진행한 후 수업을 마무리하였다.

Table 4 Subjects information

모둠	1조			2조			3조			4조			5조		
학생	s11	s12	s13	s21	s22	s23	s31	s32	s41	s42	s43	s51	s52	s53	
성별	남	남	남	여	여	여	남	남	남	남	남	남	남	남	남

Table 5 Classroom instruction procedure

시간(분)	활동	세부내용
5	중학교 2학년 확률 복습	<ul style="list-style-type: none"> • 동전 던지기 실험에서 상대도수의 정의 복습 • 상대도수로서의 확률과 경우의 수의 비율로서의 확률 사이의 관계 복습
5	문제 상황 및 시뮬레이션 소개	<ul style="list-style-type: none"> • 수업에서 다룰 주머니 공 비복원 추출 문제 상황 소개 • 확률 시뮬레이션 소개 및 조작법 안내
10	시뮬레이션 결과 해석	<ul style="list-style-type: none"> • 빈도 수형도로 제시되는 시뮬레이션 결과 해석
40	조건사건이 먼저 일어난 조건부확률[활동1]	<ul style="list-style-type: none"> • 조건사건이 먼저 일어난 조건부 상대도수 구하기(시행횟수 $n=500$) • 조건의 유무, 조건의 종류에 따른 상대도수의 변화 탐구 • 시뮬레이션을 이용하여 시행횟수가 충분히 클 때 상대도수로서의 조건부확률 구하기 • 실험없이 이론적으로 조건부확률 구하기[변화된 표본공간에서의 수학적 확률]
30	조건사건이 나중에 일어난 조건부확률[활동2]	<ul style="list-style-type: none"> • 조건사건이 나중에 일어난 조건부 상대도수 구하기(시행횟수 $n=500$) • 시뮬레이션을 이용하여 시행횟수가 충분히 클 때 상대도수로서의 조건부확률 구하기 • 실험없이 이론적으로 조건부확률 구하기[두 확률의 비로서의 조건부확률]
10	조건부확률 형식화[활동3]	<ul style="list-style-type: none"> • '조건부확률' 용어와 기호 도입 • 조건부확률의 일반적 정의 $P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 정리하기

5. 자료 수집 및 분석

본 연구는 사례 연구의 객관화를 위하여 자료 수집을 다원화하였다. 수집한 자료는 수업 촬영 영상, 노트북 화면 및 음성 녹화 영상, 학생용 활동지이다. 총 6대의 캠코더를 이용하여 수업을 촬영하였다. 모둠 내에서 나타나는 상호작용을 자세히 관찰하기 위하여 모둠별로 1대씩 캠코더를 배치하였으며, 나머지 1대의 캠코더는 교실 뒤편에서 전체 수업을 촬영하는 데 사용하였다. 학생들의 시뮬레이션 조작을 자세히 관찰하기 위하여 모둠별로 배치된 노트북 화면을 녹화하면서 외부 마이크 음성도 함께 녹음하였다. 수집한 모든 영상을 전사하여 전사자료를 생성하였다. 학생들에게는 활동지의 답을 수정할 때 되도록 지우개를 사용하지 말고 두 줄로 그은 후 옆에 새로운 답을 쓰도록 안내하였고, 수업 후 활동지를 모두 수합하였다.

빈도적 관점의 도입 활동은 크게 조건부 상대도수를 구성하는 단계와 경험적 확률을 이론적 확률과 연결하는 단계로 구분할 수 있다. 이에 본 연구에서는 자료를 활동1의 1~5번, 활동1의 6~7번, 활동2의 1번, 활동2의 2~3번의 네 단계로 구분한 뒤 분석하였다. 각 단계에서 학생들의 확률 추론 양상을 조직적으로 분류하여 살펴보기 위하여 '개별 학생의 초기추론'과 '모둠 활동을 통한 추론의 조정 과정'을 기준으로 자료를 분류하여 분석하였다(Woo et al., 2006). 학생의 초기추론은 모둠 활동 초기 의견 공유 과정에 대한 전사자료와 활동지의 최초 응답을 이용하여 판단하였으며, 이러한 개별 학생의 추론이 모둠 활동을 통해 어떻게 조정되는지 살펴보았다. 활동1의 1~5번, 활동2의 1번에서는 조건부 상황의 가능성을 나타내기 위해 상대도수의 분모와 분자를 어떻게 선택했는지에 초점을 두고 살펴보았다. 활동1의 6~7번, 활동2의 2~3번에서는 시뮬레이션을 이용하여 구한 경험적 확률을 이론적으로 설명하기 위하여 어떤 추론을 하는지 초점을 두고 분석하였는데, 특히 조건부 상대도수를 구성한 경험과 시뮬레이션에 의한 점검이 이론적 설명 과정에 어떻게 활용되는 지 살펴보았다. 추론 결과가 동일한 표현으로 나타나더라도 과정이 다르면 구분하여 분석하였다. 이론적 배경에서 살펴본 추론 특성이나 오개념의 영향이 나타나는 지도 살펴보았다.

기본적으로 전사 자료에 나타난 발화, 영상 속 학생의 제스처, 수합한 활동지 기록을 분석하여 학생들의 추론 과정을 살펴보았으며, 시뮬레이션에서의 조작이 이루어지는 부분들은 노트북 화면 녹화 영상을 함께 분석하였다. 사례 연구의 타당성을 확보하기 위하여 수업을 실행했던 교사로부터 연구 결과에 제시된 수업에 대한 연구자의 해석을 검증받는 과정을 거쳤다. 단계별로 나타난 학생들의 추론을 개별 학생의 초기추론과 모둠 활동을 통한 조정 과정을 기준으로 유형화하여 대표적인 에피소드를 기술하고 해석하는 방식으로 연구 결과를 정리하였다.

IV. 결과 분석

1. 활동1의 1~5번: 조건사건이 먼저 일어난 조건부 상대도수

활동1의 1~5번은 모둠별로 시뮬레이션을 500회 실행한 후 빈도 수형도로 제시되는 실험결과의 빈도를 이용하여 각 사건의 가능성을 나타낼 수 있는 상대도수를 구성하는 과제이다. 14명의 모든 학생들이 1번, 2번 조건이 없는 단 순사건의 상대도수를 정확히 구하였다. 그러나 조건부 상대도수를 구하는 3, 4번의 응답은 $\frac{n_{rb}}{n_r}$, $\frac{n_{rb}}{n_t}$ 의 두 가지 유형

9) 연구 결과의 효율적 기술을 위하여 전체 시행횟수는 n_t , A가 빨간 공을 뽑은 횟수는 n_r , A가 빨간 공을 뽑고 B가 파란 공을 뽑은 횟수는 n_{rb} 와 같은 방식으로 나타냈다.

으로 나타났다. 모둠 활동이 끝난 시점에 14명 중 9명은 $\frac{n_{rb}}{n_r}$ 를 바르게 구하였지만, 5명은 $\frac{n_{rb}}{n_t}$ 이라고 생각하고 있었다. 학생들의 추론 양상은 후술하는 3가지 유형으로 분류할 수 있었다.

1) $\frac{n_{rb}}{n_r}$: 조건부 상대도수를 바르게 구성

s13, s21, s22, s42, s43, s52, s53의 7명은 개별활동 단계에서 조건부 상대도수를 바르게 구하였다. s23, s41의 경우 처음에는 분모가 $500(n_t)$ 이라고 생각했으나 모둠 활동에서 팀원과 상호작용하면서 추론을 수정하였다. 따라서 14명 중 9명(64%)이 조건부 상대도수를 바르게 구성하였다. 다음은 s41과 s42의 모둠 토론 대화 중 일부이다.

- 1 s42: (s41이 3번, 4번 상대도수의 분모를 500으로 적은 것을 보고) 여기 $200(n_r)$ 분에 아니야? A가 먼저 빨간 거를 뽑고 생각하는거니까
- 2 s41: 어 그거 나도 헛갈려
- 3 s42: 500 분에 인가?
- 4 s41: 전체적인게 500이니까
- 5 s42: A가 먼저 빨간색을 뽑았으니까
- 6 s41: '상황에서'이니까, $200(n_r)$ 이 맞을 수도 있겠다. A가 먼저 빨간 공을 뽑은 상황. $200(n_r)$ 분에가 맞는거 같아. $200(n_r)$ 이 맞는거 같아(s41이 3번, 4번의 분모를 500에서 각각 $200(n_r)$, $300(n_b)$ 으로 수정함)

s41은 상대도수의 분모를 전체 시행횟수와 조건사건이 일어난 횟수 중에 어떤 것으로 선택해야할 지 고민했으나(줄 2), s42의 조건사건에 대한 언급(줄 1, 5)을 통해 조건사건이 이미 일어난 시점에서의 가능성임을 인식하고 분모를 n_t 에서 n_r 로 수정하였다.

교사는 개인활동과 모둠활동을 마무리 한 후 먼저 3조에게 발표를 시켰다. 3조는 3번, 4번에서 조건사건의 발생횟수에 대응되는 분모를 전체 시행횟수 $500(n_t)$ 으로 정하였다. 이에 교사는 3조와 다른 결과가 나온 모둠이 있는지 확인한 후 1조의 s13에게 발표 기회를 주었다. s13의 발표 내용은 다음과 같다.

- 7 t: 그리고 3, 4번이 왜 3조와 다르게 나왔어? 설명해 줄래?
- 8 s13: 그니까 빨간 공을 애초에 일단 뽑았다고 가정하는 거잖아요. 그래서 무조건 여기인(수형도에서 $207(n_r)$ 을 동그라미 치며) 경우의 수가 있어야 하니까 그래서 분모가 $207(n_r)$ 이 되는 거고, 거기서 파란 공을 뽑는 거니까 분자가 이제 $163(n_{rb})$ 이 되는거고 이것도 4번도 똑같이 무조건 이거(수형도의 n_b 가르키며)뽑았다고 가정하는 거니까 분모가 $293(n_b)$ 이 그리고 분자가 이제 $153(n_{bb})$ 이 되요.
- 9 t: 그러면 1조에서는 2번과 3번의 상대도수가 다르잖아 지금, 그거는 왜 다르다고 생각해요?
- 10 s13: 여기는(2번) 그냥 파란 공을 뽑았다고 가정해 놓고, 애(3번)는 그냥 이걸(수형도의 n_r 가르키며).. 아 뭐라 해야하지.. (잠시 정적) 조건이 있잖아요? 3번은 빨간 공을 뽑았다는 조건이 있어서 그게 이유라고 생각합니다. 근데 2번은 조건이 없어서
- 11 t: 그러면 3번과 4번이 다른 건 왜 그런거야?
- 12 s13: 그거는 둘 다 조건이 있는 것 같은데, 이 3번의 조건은 빨간 공을 뽑았을 때라는 그 조건이고 4번의 조건

은 A가 파란 공을 뽑았을 때라는 조건이니까 3, 4번의 조건이 달라서 상대도수가 다르게 나온다.

s13은 3조와 달리 상대도수의 분모를 조건사건이 일어난 횟수로 정하였다. 교사의 설명을 요청하는 발문에 s13은 조건사건이 이미 일어났다고 가정한 상황에서 목적사건의 가능성을 나타내는 것이기 때문에 상대도수의 분모를 조건사건이 일어난 횟수로 제한해야 한다고 대답하였다(줄 8). 또한 과제 설계의 의도대로 조건부 상대도수를 구하는 활동을 통해 조건의 유무, 조건사건의 종류에 따라 가능성이 변할 수 있다는 것을 이해하였다(줄 10, 12).

이와 같이 대부분의 학생들은 조건사건이 일어났다는 가정 또는 일어난 시점에서의 가능성이라는 부분에 주목함으로써 상대도수를 적절하게 구성할 수 있었다. 조건부 상황의 가능성을 상대도수로 표현하는 과제는 적절한 분모가 무엇인가에 대해 고민하는 기회를 제공하고, 항상 부분으로만 다루었던 특정 사건이 일어난 횟수를 전체로 인식하도록 하였다. 또한 단순 사건, 조건부 사건의 가능성을 상대도수로 나타내고 비교하는 활동을 통해 조건에 따라 목적 사건의 가능성이 변화함을 이해할 수 있었다.

2) $\frac{n_{rb}}{n_t}$: 문제 상황을 곱사건으로 이해

일부 학생들은 조건부 상대도수에 대해 잘못된 추론을 하였다. 4명의 학생 s11, s12, s31, s32은 ‘A가 빨간 공을 뽑았을 때, B가 파란 공을 뽑는 사건’을 곱사건 ‘A가 빨간 공을 뽑고, B가 파란 공을 뽑는 사건’으로 이해하였다. 다음은 모둠 토론이 끝난 후 3조 s32의 발표 중 일부이다.

- 13 s32: 3번은 A가 빨간 공일 때 B가 파란 공(수형도의 n_{rb} 가르킴), 여길 보면 A가 빨간 공일 때 B가 파란 공은 $163(n_{rb})$ 번인데 똑같이 500번 중에 163번이니까($\frac{163}{500}$ 을 판서) 그 다음 이거 4번은 순서가 바뀌니까 A가 파란 공이고 B도 파란 공일 때 153번(n_{bb}) 똑같이 500번 중에 153번이니까 이렇게 나왔습니다($\frac{153}{500}$ 을 판서).
- 14 t: 자 그러면 3조는 다 저렇게 똑같이 나온 거예요? 박수 한번 쳐 주고. 그 다음 3조에서는 2번과 3번의 값이 다른 이유는 뭐야?
- 15 s32: 일단은 2번과 3번이 다른 이유는 먼저 2번은 봤을 때 파란 공일 뿐이지 않아요. 2가지의 경우의 수가 있는데(칠판의 수형도에서 B가 파란 공을 뽑는 경우 n_{rb} , n_{bb} 2개를 분필로 가르킴) 3번 같은 경우에는 이미 빨간 색은 뽑았고 그 다음 파란색이니(수형도 n_{rb} 가르키며) 1가지의 경우의 수 때문에 어쩔 수 없이 다르다고 생각하고요.

‘A가 파란 공이고 B도 파란 공일 때’라는 설명(줄 13)과 상대도수를 보았을 때, s32는 문제 상황을 곱사건으로 이해했음을 확인할 수 있다. 곱사건으로 이해한 학생들은 s32의 경우와 같이 2번과 3번이 다른 이유를 경우의 수 관점에서 2번은 B가 파란 공을 뽑는 2가지 경우를 포함하고, 3번은 A가 빨간 공, B가 빨간 공의 1가지 경우이기 때문에 다르다고 추론하였다. 1조의 s11, s12도 3조와 같이 문제 상황을 곱사건으로 이해하였고, 모둠 내에서 s13과의 토론이 있었으나 교사의 설명이 있을 때까지 수정이 나타나지 않았다. 처음으로 “~일 때, ~인 사건”이라는 관용적인 표현이 등장하기 때문에, 교사는 이미 빈도 수형도를 해석하는 활동에서 이 표현이 의미하는 조건부 상황에 대해 구체적인 예를 들어 설명하였다. 또한 의도적으로 ‘A가 먼저 빨간 공을 뽑은 상황에서, B가 파란 공을 뽑을 가능성을 나타낼 수 있는 상대도수를 구해보자’와 같이 구체적으로 기술하였음에도 불구하고 조건부 상황을 곱사건으로 이해하는 학생

들이 나타났다.

3) $\frac{n_{rb}}{n_t}$: 문제 상황을 이해했으나 분모를 전체 시행횟수로 본 경우

s51의 경우 조건부 상황에 대해서 정확히 이해했음에도 불구하고, 가능성을 나타내는 상대도수의 분모를 전체 시행횟수 $500(n_t)$ 으로 선택하였다. 다음은 활동1의 3번에 대한 5조의 모둠 토론 내용 중 일부이다.

- 16 s52: 3번은?
- 17 s51: 500분의 $136(n_{rb})$
- 18 s52: 500분어야?
- 19 s53: 난 $186(n_r)$ 했는데
- 20 s51: (수형도의 $186(n_r)$ 을 가르키며) 아, $186(n_r)$ 으로 먼저 제한해놓고 해야하는건가? 4번도 $314(n_b)$ 분의 $151(n_{bb})$ 나왔잖네?
- 21 s52, s53: 응
- 22 s51: (잠시 후 순회지도 중인 교사에게 s51이 질문을 함) 상대도수요. 정의가 뭐예요?
- 23 t: 동전을 100번 던졌을 때 앞면이 40번 나온다 그러면 앞면이 나온 상대도수는 $\frac{40}{100}$
- 24 s51: 그러면 이렇게 A를 거치고(수형도에서 $A_{빨}$, $A_{파}$ 를 동그라미 치면서) 나서 들어가는 그 상대도수 구할 때는 분모를 무엇을 써야해요?
- 25 t: 음 그걸 이제 생각해보는 건데. 요(활동지 3번 문장을 가르키며) 가능성을 나타내줘야되잖아? A가 먼저 이미 빨간 공을 뽑은 상황에서 이제 B가 파란 공을 뽑으려고 했을 때 파란 공이 나올 그 가능성을 나타내 줄 수 있으면 분모를 뭘로 해야겠어?

5조의 경우 s52와 s53은 분모를 $186(n_r)$ 이라 생각했지만, s51은 분모를 500으로 정하였다. s51은 조건부 상황에 대해 정확히 이해하고 있었고(줄 24) 분모를 186으로 설정한 s52, s53의 의견을 확인하였지만(줄 20) 여전히 분모 설정에 어려움을 겪었다. s51은 교사에게 답을 요청했지만(줄 24), 교사는 학생이 스스로 생각할 수 있도록 ‘가능성’을 강조하여 문제의 의도를 재진술하는 응답을 하였다(줄 25). s51은 활동1 마무리 단계에서 교사의 설명을 듣고 난 후에야 상대도수의 분모가 조건사건이 일어난 횟수가 되어야 한다는 것을 이해할 수 있었다. 특히, s51이 상대도수의 정의에 대해 교사에게 질문하는 부분을 주목할 필요가 있다(줄 22). 중학교 1학년에서는 표에서 전체 도수에 대한 각 계급의 도수의 비율로서 상대도수를 정의하며, 중학교 2학년 확률 도입 과정에서도 전체 시행횟수에 대한 특정 사건이 일어난 횟수의 비율로 상대도수를 소개한다. 즉, 항상 분모가 전체 도수인 상대도수만을 다루었던 사전 경험이 s51이 전체 시행횟수가 아닌 조건사건이 일어난 횟수를 상대도수의 분모로 생각하기 어렵게 하는 요인으로 작용했을 가능성이 있다.

2. 활동1의 6~7번: 경험적 확률을 표본공간의 변화를 이용하여 이론적으로 설명하기

학생들은 3, 4번과 동일한 방법으로 시뮬레이션에서 분모, 분자를 선택하여 상대도수를 구성하고 시행횟수가 충분

히 클 때의 값인 경험적 확률을 활동지에 적었다. 모든 모둠이 1000회 이상의 충분한 시행을 실행하였는데, 대부분은 마지막에 나타난 상대도수를 적었고 일부는 가장 빈번하게 보였던 상대도수를 적었다. 이후 학생들은 모둠 토론을 통해 시뮬레이션의 도움없이 이 확률을 이론적으로 구하는 방법에 대해 고민하였다. 활동1의 전반부와 달리 모든 학생들이 시뮬레이션, 동료, 교사와의 상호작용을 통해 큰 어려움 없이 과제를 해결하였다. 단, 과정에 있어서 약간의 차이가 존재하였는데 1조와 5조는 초기부터 상대도수의 구성 방법과 연결하여 이론적 설명을 시도한 반면, 2, 3, 4조에 서는 초기에 잘못된 추론이 나타났다가 시뮬레이션이나 교사를 통해 인식된 후 수정되었다.

1) 상대도수의 구성 방법과 연결된 이론적 설명

5조는 시뮬레이션을 이용하여 A가 빨간 공을 뽑았을 때 B가 파란 공을 뽑을 확률을 0.76, A가 파란 공을 뽑았을 때 B가 파란 공을 뽑을 확률을 0.5로 구한 뒤, 두 확률을 이론적으로 설명하려고 시도하였다. 다음은 s51, s53의 활동지 필기 Figure 7과 관련된 5조의 대화이다.

- 26 s51: 아까 상대도수 분모를 전체가 아니라 그니까 정말 전체가 아니라 이거(활동지 'A가 빨간 공을 뽑았을 때'에 동그라미 치며)일 때 자나. 똑같이 확률 구했던 것처럼 하면은 그니까 결국에 애('A가 빨간 공을 뽑았을 때'에 밑줄 치면서)는 고정인거야
- 27 s51: 애의 확률은 고려하지 않고 애는 무조건 전체라고 하는 거지. 1이자나 그러면 그 상태에서 B가 파란 공을 뽑으니까 다섯개 중에서 이미 하나를 뽑았으니까 4분의 파란 공 3개 해서 $0.75, \frac{3}{4}$
- 28 s53: 아~~ 맞네
- 29 s51: 똑같이 이것도 A가 파란 공을 뽑았을 때는 그냥 고정된 거라고 생각을 하니까 1을 한다음에 B가 파란 공을 뽑으면, 이미 파란 공이 하나 뽑혀있으니까 4분의 2해서 0.5
- 30 s53: 아. 그니까, 5개 있을 때, 빨간 공을 뽑았으니까 4개남고 파란 공이 3개니까 0.75 이렇게 나오는거고 애는 파란공을 뽑았으니까 2개 2개 해서 0.5

s51은 조건부 상대도수를 구성할 때 조건사건이 이미 일어난 횟수를 분모, 즉 전체로 두었던 경험을 토대로 조건사건이 이미 일어난 후의 표본공간에 주목하여 확률을 구할 수 있었다(줄 26). s51은 조건사건이 반드시 일어났다고 가정해야 한다는 측면에서 확률 1을 할당하고(줄 27) 조건부확률 $\frac{3}{4}$ 와 곱하였다. 이는 학생들이 2개 이상의 사건이 포함된 맥락에 곱셈 정리를 적용하려는 경향이 있음을 보여준다. 조건부 상황을 곱의 의미로 해석했다는 점에서 수학적 인 오류가 있지만, $\frac{3}{4}$ 에 대한 설명은 변화된 표본공간에서의 공의 비율을 이용한 추론을 포함한다. s53도 s51과의 대

Figure 7 Responses of s51 and s53

확률을 통해 경험적 확률을 변화된 주머니에서의 공의 비율과 연결 지어 설명할 수 있었다(줄 30). 또한 s51과 s53은 시뮬레이션을 통해 구한 경험적 확률을 자신의 이론적 모델을 점검하는데 사용하였다(줄 27, 줄 30). 1조에서의 양상도 5조와 유사하게 나타났다. 즉, 상대도수의 분모를 조건사건에 따라 축소했던 경험이 조건사건에 의한 표본공간의 변화에 주목하고 수학적 확률을 생각하는 데 도움이 되었다.

2) 잘못된 초기 추론이 수정된 경우

2조는 처음에 단순히 상대도수의 ‘횡수’를 ‘확률’로 바꾸어 $\frac{B\text{가 파란 공을 뽑을 확률}}{A\text{가 빨간 공을 뽑을 확률}}$ 라고 추론했고 3조, 4조는 곱사건의 확률(A가 빨간 공을 뽑을 확률)×(B가 파란 공을 뽑을 확률)로 생각하였다. 그러나 이들은 시뮬레이션과 큰 수의 법칙을 이용하여 이론적 모델을 점검하면서 잘못된 추론을 인식하고 수정할 수 있었다. 다음은 3조와 4조의 모둠 토론 내용과 관련 장면(Figure 8)이다.

- 31 s32: (활동지에 적으면서) $\frac{2}{5}$ 곱하기 $\frac{3}{4}$ 해서 $\frac{6}{20}$... (모니터의 0.76을 가르키며) 다르네. 아 그니깐, 얘를 생각했을 때 얘(문제를 가르키며)는 무조건 빨간 색을 먼저 뽑고 난 뒤에 해당되는 상대도수니까
- 32 s31: 그렇지 그러면 다시 해야겠네? 우리 아까 할 때도 이걸(모니터 수형도의 $A_{\text{빨}}$ 을 가르키며) 분모로 했던 거 맞지?
- 33 s32: (끄덕 끄덕) 아! 이미 빨간색을 뽑은거니까 빨간색을 하나 빼고 그럼 총 개수가 4개자나 그 중에 3개하면 (종이에 $\frac{3}{4}$ 를 쓰고 상대도수 0.76에 밑줄 치면서) 비슷하게 나오네
- 34 s31: 아 그러네. 이거는?
- 35 s32: 이것도 파란 공을 뽑으면 2개, 2개. (활동지에 적은 상대도수 0.5 보면서) 그래서 비슷한거네
- 36 s31: 아 그러네. 이걸 말로 적어야 된다는데?
- 37 s32: 개수를 이용하여니까.. 그 공 뽑은 후의 개수를 분모로 남은 그 뽑을 공의 개수를
- 38 s31: 분자로
- 39 s32: 응 그럼 구할 수 있을 것 같은데
- 40 t: 왜 곱했어?
- 41 s42: 이거 전체 5개 중에 빨간 거 뽑으니까 $\frac{2}{5}$, 두 번째는 B가 파란 공 뽑으니까 4개 중에 파란공 2개니까. 아 니 3개니까 $\frac{3}{4}$

Figure 8 Scenes related to group discussions in groups 3 and 4

(좌) 상대도수의 분모에 해당했던 n_r 를 가르키는 장면(줄 32) (우) 구한 확률과 활동지에 적어놓은 상대도수를 비교하는 장면(줄 33)

(좌) 교사에게 곱사건의 확률로 설명하는 장면(줄 41) (우) 상대도수의 분모를 바탕으로 새로운 추론을 제시하는 s41(줄 46)

- 42 t: 그래서 곱했다? 조원들의 의견이 다 일치해?
- 43 s41: 네
- 44 t: 진짜야? 음~ (교사가 떠남)
- 45 s42: 반응이 틀린 것 같은데?
- 46 s41: 이게 여기서(문제의 'A가 빨간 공을 뽑았을 때'를 가르키며)니까 아까처럼 애(수형도의 A빨)가 분모가 되야하는거 아니야?
- 47 s42: 무슨 말이야?
- 48 s41: 애가 분모가 되어야하자나. 그런데 애($\frac{2}{5}$)는 분모가 애(수형도의 전체(n)) 가르키며)자나 (잠시 후)
- 49 s41: 혹시 $\frac{3}{4}$ 인가? 이렇게 생각할 수 있을 것 같은데 4개 중에 3개. 그럴 것 같지 않아? 애는 $\frac{3}{4}$, 애는 $\frac{1}{2}$
- 50 s42: (활동지에 0.77과 $\frac{3}{4}$, 0.53과 $\frac{1}{2}$ 을 번갈아가며 가르키며) 애랑 애랑 비슷하네
- 51 s41: 맞는거 같아. (지우개로 앞에 곱해져있던 $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ 을 지우고 $\frac{3}{4}$ 과 $\frac{1}{2}$ 만을 남김)

두 모둠에서 나타난 특징을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 활동1을 통해 조건부 상황을 이해하고 상대도수를 구했음에도 불구하고, 초기에 다시 곱사건의 확률과 연결시키려는 시도가 나타났다(줄 31, 41). 둘째 큰 수의 법칙과 시뮬레이션을 통해 구한 상대도수가 학생들에게 추론을 점검하고 반성하는 기회를 제공하였다. 3조는 시뮬레이션의 상대도수와 비교하여 곱사건의 확률이 잘못된 추론임을 인식하였으며(줄 31), 수정한 추론을 다시 상대도수와 비교하여 점검하였다(줄 33, 35). 4조의 경우 오류의 인식은 교사의 발문과 반응에 의한 것이었지만(줄 45), 새로운 추론을 큰 수의 법칙을 이용하여 점검하는 모습이 동일하게 나타났다(줄 50). 특히 경험적 확률과 이론적 확률의 차이가 0.1~0.3 정도 있었지만 학생들은 변이성을 고려하여 두 값을 비교하는 모습을 보였다(줄 33, 50). 셋째, 이전 활동에서 조건사건에 따라 상대도수의 분모를 축소한 경험이 질적으로 변화된 표본공간을 인식하는 데 기여하였다(줄 32, 46). 이는 앞선 1조, 5조의 사례에서도 동일하게 나타난 것이다. 넷째, 곱사건의 확률을 계산하는 과정에서 이미 $\frac{3}{4}$ 을 구했지만, 그것이 바로 경험적 확률과 연결되지 않았다. 경험적 확률과 조건부확률을 각각 구할 수 있다고 해서 두 대상이 즉각적으로 연결되는 것은 아니었다(줄 31, 41). 상대도수로 구한 확률을 이론적으로 설명하는 과정을 거친 후에야 단절되었던 경험적 확률(0.76 또는 0.77)과 이론적 확률 $\frac{3}{4}$ 이 연결되었다.

3. 활동2의 1번: 나중에 일어난 사건이 조건인 상대도수

활동2의 1번은 나중에 일어난 사건이 조건인 'B가 파란 공을 뽑았을 때, A도 파란 공을 뽑았을 가능성'을 상대도수로 나타내는 것이다. 교사는 학생들이 조건부 상황을 정확히 이해할 수 있도록 A가 먼저 뽑은 공의 색깔을 모르는 상황에서 B가 파란 공을 뽑았을 때, A도 파란 공을 뽑았을 가능성에 대해 생각해야 함을 강조하여 설명하였다. 이미 활동1에서 조건부 상대도수를 구한 경험이 있었고, 초등학교 6학년도 53%가 빈도 수형도를 이용하여 역확률 문제를 해결할 수 있었다는 선행연구(Zhu & Gigerenzer, 2006)에 비추어 볼 때, 학생들이 어려움 없이 상대도수를 구할 수 있을 것으로 예상하였다. 그러나 처음부터 바르게 상대도수를 구한 조는 하나도 없었다. 교사가 모둠 토론에 개입하

기 전 학생들의 응답을 살펴보면, 곱셈 정리를 적용한 $\frac{n_{bb}}{n_b} \times \frac{n_b}{n_t} = \frac{n_{bb}}{n_t}$ 이 3명, 목적사건만 고려한 $\frac{n_b}{n_t}$ 이 3명, 목적사건의 빈도에 오류가 있는 $\frac{n_b}{n_{bb} + n_{rb}}$ 가 6명이었다.

1) $\frac{n_{bb}}{n_b} \times \frac{n_b}{n_t} = \frac{n_{bb}}{n_t}$: 곱셈 정리를 적용한 경우

일부 학생들은 곱셈 정리를 적용하여 $\frac{n_{bb}}{n_b} \times \frac{n_b}{n_t} = \frac{n_{bb}}{n_t}$ 라 생각했는데, 이는 $P(A|B)$ 를 $P(B|A)P(A)$ 로 접근한 것으로 볼 수 있다. 예를 들어, 다음은 3조 학생들의 토론 내용이다.

- 52 s32: 곱해야하지 않을까? 애($B_{\text{파란}}$)를 뽑았을 때, 애($A_{\text{검}}$)도 뽑고 애($B_{\text{검}}$)도 뽑아야하니까. 이미 애($A_{\text{검}}$)를 뽑았으니까! 그럼 전체를 생각해야하나?
- 53 s31: 500분의...(고개를 가우뚱) 500분의 299(n_b) 곱하기 299분의 141(n_{bb}) (s32이 받아서 적어봄)
- 54 s32: ($\frac{299}{500} \times \frac{141}{299}$ 을 보면서) 이걸로 하면은 이거($A_{\text{검}}$) 뽑고 이거($B_{\text{검}}$) 뽑는거자나
- 55 s31: 그렇긴 하네. 그럼 그냥 $\frac{141}{500}$ 인가?

3조의 경우 활동1에서 ‘~일 상황에서 ~일 가능성’과 같은 조건문을 곱사건으로 이해하고 곱셈정리를 적용하여 상대도수를 구했었다. 이후의 활동을 통해 조건문의 형식과 의미를 충분히 이해했음에도 불구하고 활동2에서 또 다시 조건사건이 나중에 일어난 조건부 상황의 가능성을 곱셈 정리를 적용하여 접근하였다(줄 54). B가 파란 공을 뽑으려면 A가 이미 파란을 뽑아야한다는 발화(줄 52)를 참조했을 때 조건문 해석의 문제라기보다는 시간축 오개념의 영향으로 곱셈 정리를 적용한 것으로 판단된다. 3조 학생들은 교사의 개입이 있기 전까지 추론의 오류를 발견하지 못하였다. 한편, 다음은 모듈 토론 시간에 순회지도를 하던 교사와 1조 학생들의 대화 내용 중 일부이다.

- 56 s12: 이거 $\frac{161}{500} \left(\frac{n_{bb}}{n_t} \right)$ 맞아요? 아닌거 같은데..
- 57 t: 여기 이진 어떻게 했어?
- 58 s11: 그냥 B가 파란색을 뽑아야하니까 이렇게($\frac{161}{316}$) 한다음에, A도 파란 색을 뽑아야하니까 이걸($\frac{316}{500}$) 곱하기
- 59 t: 음, B가 파란 공을 뽑았을 때~ 라고 했자나. (활동지에 밑줄 치면서)
- 60 s12: (2개의 손가락을 벌려 수형도의 n_{rb} , n_{bb} 를 가르키며) 그럼 이거 아니에요?
- 61 t: 그래 B가 파란 공을 뽑았을 때, $139+161(n_{rb}+n_{bb})$ (활동지에 적으면서)
- 62 s12: (s11을 향해 샅대질을 하면서 자기가 맞았다는 표정을 지음)
- 63 t: 분자는 뭐야?
- 64 s12: 분자 이거 아니에요? ($316(n_b)$ 을 손으로 가르키며)
- 65 s11: (웃으며 틀렸다는 듯이) 분자가 그거냐?
- 66 t: B가 파란 공을 뽑았을 때 A도 파란 공을 뽑았다.. 316개?
- 67 s12: 아, 아, 아, 161이요
- 68 t: 161? 왜 161이야?

69 s12: 그니까 B 뽑았을 때 이렇게(문제의 'A도 파란 공을' 부분을 가르킴) 되려면은 (수형도의 n_{bb} 가르킴) 둘다 파란 색이어야 하는데, 그건 161인데, 전체는 300?(손가락 2개로 n_{rb} , n_{bb} 를 가르키며) 300이니까, $\frac{161}{316}$.
70 t: 그렇지

1조의 s11도 3조와 동일하게 $\frac{n_{bb}}{n_b} \times \frac{n_b}{n_t} = \frac{n_{bb}}{n_t}$ 라 생각하였고(줄 58), s12은 s11의 추론이 이상하다고 느끼고는 있었지만 구체적인 대안을 제시하지는 못한 상황이었다. 이때 순회지도 중인 교사가 접근하자 s12은 교사에게 s11의 의견에 대한 점검을 요청한다(줄 56). 이에 교사가 조건사건을 강조하여 재진술하자(줄 59) s12이 분모에 대한 바른 추론을 제시하였다(줄 60). 이후 s12는 분자를 316(n_b)로 잘못 추론했었지만, 교사가 조건사건을 다시 한번 강조하여 발문하자 바르게 수정할 수 있었다(줄 66, 67). s11, s12는 교사와의 상호작용을 통해 조건사건이 나중에 일어난 조건부 상대도수의 분모, 분자에 대해 정확히 이해할 수 있었다(줄 69).

2) $\frac{n_b}{n_t}$: 조건사건이 영향을 줄 수 없다고 생각한 경우

4조의 경우 상대도수를 $\frac{n_b}{n_t}$ 로 구하였다. 다음은 관련된 4조의 모둠 토론 내용이다.

71 s41: A가 먼저 뽑으니까 B는 A가 알바가 아니자나

72 s42: 응

73 s41: A는 파란 공을 뽑은 게 300개니까 (자기가 쓴 답 가르키며) $\frac{300}{500}$

74 s41: 앞에 A가 뭘 뽑든 간에 애(수형도에서 A빨, A파 가르키며)는 어차피 이 확률이지나 A가 먼저 뽑으니까.

s41은 B가 A보다 나중에 공을 뽑기 때문에 B가 파란 공을 뽑는 사건이 A가 파란 공을 뽑는 사건의 가능성에 영향을 줄 수 없다고 생각하였다(줄 41). 따라서 B가 '파란 공을 뽑았을 때 A가 파란 공을 뽑았을 확률'은 'A가 파란 공을 뽑았을 확률'과 같다고 생각하여 상대도수를 $\frac{n_b}{n_t}$ 로 구성하였다. 다른 조원들도 s41의 의견에 동조하였다. 이는 조건 관계를 시간순서와 관련 짓는 시간축 오개념이 작용한 사례로 볼 수 있다. 4조의 경우도 앞서 살펴본 1조의 사례와 같이 교사와 상호작용하면서 나중에 일어난 사건을 분모로 두는 조건부 상대도수를 완성할 수 있었다.

3) $\frac{n_b}{n_{bb} + n_{rb}}$: 목적사건의 빈도를 잘못 구한 경우

2조와 5조는 정답에 가장 근접한 상대도수 $\frac{n_b}{n_{bb} + n_{rb}}$ 를 구하였다. 다음은 2조가 상대도수를 구성하는 과정에서 나타난 토론이다.

75 s22: B가 파란 공을 뽑았으니까 150(n_{bb}). A가 파란 공을 뽑았으니까 313(n_b) 해서 $\frac{313}{150}$. 근데 이럴 수가 있나? 1이 넘을 수가 있다고? 이럴수가 있나?

76 s22: (잠시 후 뭔가 깨달은 듯이) 어? 분모가 293(150(n_{bb})+143(n_{rb}))이 되는 것 같아. B가 파란 공을 뽑으니까 애네(수형도에서 두 손가락으로 n_{rb} , n_{bb} 를 가르키며) 둘 다인 것 같아. (지우고 $\frac{313}{293}$ 으로 수정함)

77 s23: 그래도 1보다 큰데?

78 s22: 아 그러네. 모르겠어. A가 빨간 공을 뽑고 B가 파란 공을 뽑았는데, 어쨌든 B가 파란 공을 뽑으니까 분모가 293이 될 수 있을 것 같아. 근데 그래도 1보다 커 가지고..

s22는 처음에 $\frac{n_b}{n_{bb}}$ 로 생각했다가 상대도수가 1보다 큰 것을 보고 $\frac{n_b}{n_{bb} + n_{rb}}$ 로 수정하였다(줄 75, 76). 그러나 여전히 상대도수가 1보다 큰 문제를 해결하지 못하였다. A가 파란 공을 뽑은 모든 횟수(n_b)를 분자에 두었다는 점에서 오류가 있지만, s22는 조건을 만족시키는 B가 파란 공을 뽑은 횟수($n_{bb} + n_{rb}$)를 전체로 두어야한다는 것을 이해하였다(줄 78). 5조도 2조와 동일한 결론에 도달했는데, 상대도수가 1보다 크다는 점에 주목하는 과정이 유사하게 나타났지만 추론을 개선하지는 못하였다.

$\frac{n_b}{n_{bb} + n_{rb}}$ 는 학생들이 문제의 'A도 파란 공을 뽑는 횟수'에만 집중하면서 조건을 고려하지 않은 채 수행도의 'A가 파란 공을 뽑는 횟수'와 연결시키면서 발생하는 오류로 판단된다. 그러나 시간축 오개념과 관련하여 나중에 일어난 B가 파란 공을 뽑은 횟수를 전체로 인식하고 A가 파란 공을 뽑은 횟수를 부분으로 보는 비율적 사고가 포함된 점, s12의 사례(줄 66, 67)에서 볼 수 있듯이 교사의 문제 상황 재진술과 같은 간단한 피드백만으로도 쉽게 수정할 수 있는 오류라는 점에서 의미 있는 추론이라 볼 수 있다.

4. 활동2의 2~3번: 경험적 확률을 두 확률의 비를 이용하여 이론적으로 설명하기

활동2의 2~3번은 활동1과 동일하게 시뮬레이션으로 시행횟수가 충분히 클 때의 상대도수로 'B가 파란 공을 뽑았을 때, A도 파란 공을 뽑았을 확률'을 구한 뒤, 이를 이론적으로 구하는 방법을 생각하는 것이다. 교사는 전체 발언을 통해 활동1과 같이 주머니 속 공의 개수를 이용한 방법을 적용하기 어렵다는 점을 언급하면서 보다 일반적인 방법의 필요성을 강조한 후 활동을 시작하였다. 학생들의 수준을 고려하여 1번에서 구한 상대도수의 분모, 분자를 시행횟수로 나누어 두 상대도수의 비율 $\frac{(\text{A와 B가 모두 파란 공을 뽑은 횟수})/(\text{시행횟수})}{(\text{B가 파란 공을 뽑은 횟수})/(\text{시행횟수})}$ 로 나타내는 과정을 비계로 제공하였다. 이에 대부분의 학생들이 큰 수의 법칙을 이용하여 두 확률의 비로서 조건부확률을 구하는 방법을 찾았다. 다음은 5조의 모듬 토론 내용 중 일부이다(Figure 9).

79 s51: 전체 A파 B파 중에 B파 자나? 아니야니 아니구나

80 s53: 전체가 B가 파란색

Figure 9 Scene of group 5 discussion and s51's worksheet

$$\begin{aligned} \text{A와 B가 모두 파란 공을 뽑은 확률: } & \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ \text{B가 파란 공을 뽑은 확률: } & \frac{3}{5} \\ \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}}{\frac{3}{5}} = & \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 81 s51: B가 파란색인 상태에서, 그니까 전체는 B가 파란 색일 때랑 그 중에서도 A와 B가 동시에 파란색인 경우를 구하는거자나.
- 82 s51: 그러면은 B가 항상 파란색일 때가.. B가 항상 파란색일 때는 이거자나 이거 2개(모니터 수형도에서 B가 파란 경우 두 가지를 펜으로 번갈아 가르킴) 더한 것분에 이거(A파B파 가르키며) 하면 되는 거잖아. 이걸 고려 하면은 그 A가 빨강일 때 B 파란색, A가 파랑일 때 B 파란색. 이렇게 두 개 있자나. 두 개를 계산해보면 A가 빨강일 때, 그니까 빨, 파일 때는 확률이
- 83 s53: $\frac{2}{5}$
- 84 s51: 어 $\frac{2}{5}$ 곱하기 $\frac{3}{4}$ 인가? $\frac{3}{4}$ 해서 $\frac{3}{10}$ 이고 파, 파는 $\frac{3}{5}$ 곱하기 $\frac{2}{4}$ 해가지고 $\frac{3}{10}$ 이야. 그럼 둘이 더하면은 $\frac{3}{5}$ 이야.
- 85 s53: 나도 $\frac{3}{5}$ 까지 구했어
- 86 s51: 응. 그러면은 이게 결국 이 2개(수형도 가르키며) $\frac{3}{5}$ 이라는 거자나 그 중에서 A와 B가 파랑을 뽑을 경우는 이거(수형도 A파B파 가르키며)자나. 이거는 아까 더한거 $\frac{3}{5}$ 곱하기 $\frac{2}{4}$
- 87 s53: $\frac{3}{10}$?
- 88 s51: 응 굳이 계산할 것 없이 $\frac{3}{5}$ 곱하기 $\frac{1}{2}$ 이고 그러면 확률은 이 확률($\frac{3}{5}$)분의 이 확률($\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$)이니까 $\frac{1}{2}$
- 89 s53: 어어어 아
- 90 s52: (시뮬레이션 결과 보면서)그럼 0.5 맞네

s51은 조건부 상대도수의 분모와 분자를 각각 B가 파란 공을 뽑은 횟수, A와 B가 동시에 파란 공을 뽑은 횟수로 구했던 과정과 큰 수의 법칙을 통해 조건부확률을 $\frac{A와 B가 모두 파란 공을 뽑을 확률}{B가 파란 공을 뽑을 확률}$ 로 구할 수 있음을 정확히 이해하였다(줄 81, 82). s51은 s53에게 자신의 추론을 설명하면서 필요한 확률을 차례로 구한 뒤 최종적으로 확률이 $\frac{1}{2}$ 이 됨을 계산하였고(줄 83~88), s52는 마지막에 시뮬레이션을 이용하여 구한 경험적 확률 0.5와 비교하여 이를 점검하였다(줄 90).

Figure 10은 활동지의 응답 중 일부이다. 학생들은 조건부확률을 두 확률의 비로 구할 수 있음을 자신만의 비형식적 표현으로 나타냈다. 특히 이러한 표현 속에 남아있는 상대도수의 흔적들은 조건부 상대도수에 대한 추론과 큰 수의 법칙을 통해 학생들이 조건부확률을 두 확률의 비로 이해할 수 있었음을 보여준다. 5개의 모둠이 이와 같이 큰 어려움 없이 조건부확률의 일반적 정의에 도달하는 모습을 보였다. 즉, 가능성을 상대도수로 나타낸 상태에서 상대도수를 다시 상대도수의 비로 바라볼 수 있도록 비계를 제공하면 조건부확률의 일반적인 정의를 도출하는 것에는 큰 어려

Figure 10 Students' informal representations of the definition of conditional probabilities

움이 없었다. 이후 마지막으로 활동3에서 조건부확률 용어와 기호를 도입하고 활동2에서 구한 일반적 방법을 정의로 형식화하는 빈칸 넣기 활동을 하였다. 일부 학생들이 $P(A)$, $P(A \cap B)$ 와 같은 기호 사용에 어려움을 겪었지만 실제 수업에서는 조건부확률의 학습 전에 확률 단원에서 기호를 도입하므로 본 연구의 특성상 나타난 어려움이라 볼 수 있다.

V. 결론 및 논의

본 연구는 고전적 관점의 조건부확률 도입 방식에 관한 문제 의식으로부터 출발하였으며, 대안적인 도입 방식으로 상대도수의 극한을 이용하는 빈도적 관점의 가능성을 탐색하기 위하여 수행되었다. 선행연구 분석을 통해 빈도적 관점의 조건부확률 도입 활동의 설계 방향을 1) 학생이 점진적으로 조건부확률 개념을 구성해나가도록 할 것, 2) 정의 및 해법과 관련하여 조건부확률의 복합적 측면을 경험하게 할 것, 3) 빈도 수형도를 활용하여 학생들의 조건부확률을 추론을 지원할 것, 4) 시간축 오개념의 예방을 고려할 것, 5) 시물레이션을 활용하여 학생들이 이론적 모델을 점검할 수 있게 할 것의 다섯 가지로 도출하고, 조건부확률의 빈도적 정의를 고려하여 도입 활동을 고안하였다. 고안한 활동을 실제 고등학교 1학년 학생 14명에게 적용함으로써 학생들의 추론 과정 및 특성, 어려움을 분석하였다. 분석 결과를 토대로 빈도적 관점에서 조건부확률 도입의 가능성을 탐색하고, 교수·학습 및 교육과정에 관한 시사점을 도출하고자 하였다. 연구결과를 토대로 학생들의 추론에 관해 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

첫째, 학생들은 반복시행 결과에서 조건부 상대도수의 구성→시물레이션을 이용한 경험적 확률의 확인→경험적 확률에 대한 이론적 설명으로 이어지는 빈도적 접근을 통해 조건부확률 개념을 구성할 수 있었다. 학생들은 조건부 상황의 가능성을 상대도수로 표현하기 위해서 어떤 양적 정보가 분모(전체), 분자(부분)가 되어야하는 지에 대해 추론하였고, 이는 시물레이션으로 구한 확률을 이론적으로 설명하는 단계에서 표본공간이나 다른 확률을 이용하여 조건부확률을 이론적으로 이해하는 데 기초가 되었다. 활동1에서는 학생들이 조건을 고려하여 상대도수를 구성한 경험을 토대로 조건사건에 의한 표본공간의 변화에 주목하고 확률을 구할 수 있었다. 이는 선행연구에서 조건부확률의 주요 목표로 강조됐던 비복원 상황에서 표본공간의 변화의 인식(Cho, 2010; Fischbein & Gazit, 1984; Tarr & Lannin, 2005)이 빈도에서 조건을 고려하여 상대도수를 구성하는 비율 추론에 의해 촉진될 수 있음을 시사한다. 활동2에서 학생들은 나중에 일어난 사건을 전체인 분모, 먼저 일어난 사건을 부분인 분자로 상대도수를 구성하는 추론과 큰 수의 법칙을 통해 조건부확률이 어떻게 두 확률의 비로 정의될 수 있는지 이해하였다. 학생들은 두가지 활동 이후 기호와 용어를 이용하여 조건부확률을 형식화할 수 있었다.

초기 추론에서 개인차가 존재하였고 오개념이 나타나기도 하였지만 동료와의 상호작용, 교사의 개입, 시물레이션과의 상호작용을 통해 대부분의 연구참여자들이 과제를 성공적으로 해결할 수 있었다. 특히 곱사건과의 혼동, 시간축 오개념 등이 본 연구의 수업에서도 유사하게 나타났는데, 학생들이 조건부확률에 관한 대표적인 오개념을 직면하고 극복할 수 있다는 측면에서 의미가 있었다. 이는 확률 수업에서 모둠 활동이 오개념에 대한 논의와 반성을 이끌어내고, 확률 개념에 대한 깊이 있는 이해를 도왔던 선행연구의 결과와 일치한다(Jones et al., 1999; Lee & Cho, 2015; Stohl & Tarr, 2002). 이러한 도입 방식은 학생들에게 정의를 부여하는 것이 아니라, 조건부 상황을 고려한 자료 분석과 비율 추론에서 출발하여 스스로 조건부확률 개념을 형식화시킬 수 있게 한다는 점에서 의미 있다. 또한 선행연구(Watson, 2013; Woo, 2017)에서 강조했던 경험적 빈도에 기반을 둔 보다 직관적인(Shaughnessy, 1992) 조건부확률의 정의에 관해 구체적인 도입 경로 및 활동을 설계하고 학생들의 추론 과정을 구체적으로 확인했다는 점에서 의미가 있다.

둘째, 학생들은 빈도 수형도를 통해 문제 상황을 빠르게 이해하였고, 확률 추론에 관해 토론할 때 이를 적극적으로 활용하였다. 활동1에서 학생들은 비복원 상황에 대해 빠르게 파악하고 빈도 수형도에 제시된 정보를 활용하였으며 비복원 추출에 의한 표본공간의 변화를 쉽게 인식하였다. 또한 학생들은 확률 추론에 관한 의사소통에서 빈도 수형도를 효과적으로 활용하였다. 학생들의 대화에서 수형도의 꼭짓점(또는 가지)과 빈도는 손가락 제스처가 동반된 ‘애’, ‘이것’으로 지칭되면서 ‘A가 빨간 공을 뽑은 횟수’, ‘A가 빨간 공을 뽑고 B가 파란 공을 뽑은 경우’ 등의 의미를 함축하여 빠르게 전달하는 역할을 하였다. 학생들이 수형도를 매개로 자신의 사고를 명확히 하고 전달하고 반성함으로써 추론을 발전시켜나가는 모습을 확인할 수 있었다.

한편, 활동2에 참가한 12명 중 6명(50%)은 초기부터 나중에 일어난 조건사건의 횟수가 분모인 상대도수를 구성할 수 있었고, 6명은 시간순서의 영향으로 잘못된 추론을 시도하였다. 이후 교사 및 동료와의 상호작용을 통해 모든 학생들이 시간순서와 분리하여 조건부 상대도수를 이해할 수 있었다. 선행연구(Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Zhu & Gigerenzer, 2006)에서 보고된 것처럼 단지 빈도 수형도 표현의 사용만으로 약 50%의 학생들이 시간축 오류의 영향 없이 문제를 해결하는 모습이 나타나지는 않았지만, 시간순서가 구조적으로 명확히 드러나는 빈도 수형도에서 나중에 일어난 사건이 조건인 조건부 상대도수를 구성하고 수정하는 활동을 통해 학생들은 조건관계가 시간순서와 독립적임을 이해하였다. 심리학자들에 의해 베이즈 확률의 이해나 계산을 효율적으로 지원하는 인지적 도구로서 강조되어온(Binder et al. 2015; Sedlmeier & Gigerenzer, 2001; Zhu & Gigerenzer, 2006) 빈도 수형도가 교수·학습 상황에서 비복원 상황의 이해, 시간축 오개념의 극복 측면에서 유용하게 활용될 수 있으며 모둠 활동에서 의사소통을 지원하는 강력한 수단임을 확인할 수 있었다.

셋째, 학생들은 ‘큰 수의 법칙’에 대한 비형식적 이해와 시뮬레이션을 이용하여 자신의 이론적 모델을 점검할 수 있었다. 활동1, 활동2에서 학생들은 자신들의 이론적 추론을 시뮬레이션으로 구한 상대도수와 비교하며 점검하였고, 두 값이 서로 다른 경우 잘못된 추론이라 판단하여 반성적 논의를 통해 추론을 수정하였다. 학생들은 대부분 1000회 이상의 충분한 실험을 통해 경험적 확률을 구하였다. 경험적 확률과 이론적 확률의 차이가 경우에 따라 0.1~0.3 정도 나타났지만 Yáñez (2002)의 연구와 달리 학생들은 변이성을 잘 고려하여 두 값을 비교하는 모습을 보였다. 이는 중학교 교육과정의 확률 도입 과정에서 동전 던지기 실험 등을 통해 이해한 비형식적 수준의 큰 수의 법칙만으로도 시뮬레이션을 이용하여 이론적 모델을 점검하는 기초적인 확률 모델링 활동(Chaput, Girard & Henry, 2011)이 가능함을 시사한다. 특히 시뮬레이션 결과를 빈도 수형도 형태로 출력하고 학생 스스로 필요한 빈도들을 분모, 분자로 택하여 상대도수를 구성하고 확인할 수 있도록 설계한 기능은 복잡한 계산을 생략하고 학생들이 자신들의 이론적 추론을 시험하는 데 효과적으로 집중할 수 있도록 하였다. 이는 기존 확률 영역 연구(Authors, 2017; Lee & Cho, 2015; Stohl & Tarr, 2002; Yáñez, 2002)에서 학생들이 주로 정해진 상대도수 그래프를 해석하는 소비의 관점에서 시뮬레이션이 활용된 것과 달리, 학생들이 능동적으로 자신의 추론을 시험해볼 수 있는 환경을 제공했다는 점에서 차별화된다. 확률 시뮬레이션의 설계에 있어서 시각화 방식의 중요성과 함께, 학생들이 추론의 옳고 그름을 떠나 자신의 추론을 능동적으로 시험해볼 수 있는 열린 도구를 제공하되 불필요한 계산은 블랙박스 감추고 자동화하여 확률 추론이나 사고에 집중시킬 필요가 있음을 시사한다.

이와 같이 빈도적 관점의 도입 활동을 통해 학생들은 실제 관찰할 수 있는 자료로부터 점진적으로 조건부확률 개념을 구성하고 형식화할 수 있었다. 그러나 상술하였듯이 학생들은 수업 과정에서 다양한 잘못된 추론과 오개념을 보이기도 하였다. 이는 모둠 토론과 반성의 과정을 통해 수정되면서 학생들의 이해를 심화시킨다는 점에서 조건부확률 개념의 이해를 위해 긍정적인 역할을 했다고 평가할 수 있다. 그러나 조건부확률을 빈도적으로 도입하는 과정에서 교사

가 학생의 잘못된 추론과 오개념에 효과적으로 대응하기 위해서는 지도상의 유의점에 대한 세심한 정보가 필요하다. 본 연구의 결과를 바탕으로 학생의 확률 추론 특성 및 지도상의 유의점을 도출하면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 표현의 외적 측면에 기초한 단순한 추론을 하는 경향이 있었다. 예를 들어, 활동1에서 상대도수 $\frac{A가 빨간 공을 뽑고 B가 파란 공을 뽑은 횟수}{A가 빨간 공을 뽑은 횟수}$ 에 대응되는 확률을 이론적으로 구하는 방법에 대해 추론할 때, 단순히 ‘횟수’를 ‘확률’로만 바꾸어 생각하는 경우가 있었다. 활동2에서 6명의 학생이 “B가 파란 공을 뽑았을 때, A도 파란 공을 뽑은 상대도수”를 구할 때는 “A도 파란 공을 뽑은 상대도수”라는 표현에만 주목하여 조건을 고려하지 않고 단순히 A가 파란 공을 뽑은 횟수만을 수형도에서 찾은 현상도 비슷한 관점에서 해석될 수 있다.

둘째, 조건부 상황에 곱셈정리를 적용하려는 경향이 나타났다. 조건부 상황에 포함된 2개의 사건의 상대도수나 확률을 곱하려는 시도가 모든 문제에서 나타났다. 이는 조건부확률 문제해결에서 나타났던 곱사건 관련 오개념(Lee & Woo, 2009; Pollatsek et al., 1987; Watson & Moritz, 2002)이 조건부 상대도수를 구성하는 비율 추론 과정에서도 유사하게 나타날 수 있음을 의미한다. 조건사건이 항상 일어난다고 전제하는 관점에서 확률을 1로 배정하고 목적사건의 확률과 곱하여 조건부확률을 나타내는 경우도 나타났다(Figure 7 참조). 활동1에서는 조건문 형식에 대한 이해 부족으로 인한 것이 대부분의 원인이었지만, 조건문을 해석할 수 있었던 활동2에서도 시간순서의 영향으로 어려움에 봉착하면 다시 두 사건의 상대도수를 곱하는 학생들이 나타났다.

셋째, 표본공간의 변화를 인식하여 조건부확률을 계산할 수 있고, 그것에 대응되는 조건부 상대도수를 구할 수 있다고 하더라도 두 대상이 단절되어 있는 경우가 있었다. 활동1의 6~7번에서 조건부확률을 곱사건으로 접근하던 학생들은 표현 안에 이미 표본공간의 변화를 고려한 수학적 확률이 포함되어 있었지만, 그것과 상대도수의 연결은 충분한 논의와 반성의 과정이 있는 후에 가능했다. 학생들이 빈도와 표본공간에서 조건부 상대도수와 조건부확률을 각각 구할 수 있다고 하더라도 두 대상 사이의 연결에는 추가적인 탐구가 필요할 수 있음에 유의하여 지도할 필요가 있다.

넷째, 조건부 상황의 가능성을 상대도수로 표현하는 단계에서 학생들이 자신의 추론을 점검하고 반성할 수 있는 환경 및 교수전략을 모색해야 한다. 각 활동의 경험적 확률과 이론적 확률을 연결하는 단계에서는 초기에 잘못된 추론이나 오개념이 출현하더라도 시뮬레이션의 피드백을 통해 쉽게 인식되면서 논의와 반성을 통한 수정이 자연스럽게 이루어졌다. 그러나, 빈도 수형도에서 가능성을 상대도수로 표현하는 단계에서는 학생들이 구한 상대도수에 대해 검증할 방법이 없으므로 오개념이 인식되기 어려웠고 학생 간의 의견차가 발생하더라도 논의가 상대적으로 활발하지 못했다. 본 연구에서 조건을 고려하여 상대도수를 구성하는 과정이 조건부확률 개념의 이해에 중요한 역할을 하였으므로, 이 단계에서 학생들이 자신의 추론을 직면하고 검토하며 모둠 내에서 보다 활발한 토론이 생성될 수 있도록 과제 및 수업 전략의 보완이 필요하다. 예를 들어, 학생이 구한 상대도수를 확률로 하는 반복시행의 결과를 예측해보게 하거나 실제로 확인해볼 수 있는 시뮬레이션 도구를 제공함으로써 원래의 빈도 수형도의 결과와 비교해보게 하는 것 등을 생각할 수 있을 것이다.

다섯째, 항상 분모가 전체 도수인 상대도수만을 다루었던 사전 경험이 조건부 상대도수의 구성에 영향을 미칠 수 있다. 우리나라 교육과정은 중학교 1학년에서 전체 도수에 대한 각 계급의 도수의 비율로 상대도수를 정의하며, 중학교 2학년에서는 전체 시행횟수에 대한 특정 사건이 일어난 횟수의 비율로 상대도수를 정의한다. 따라서 이러한 사전 경험은 학생들이 전체가 아닌 조건사건이 일어난 횟수를 상대도수의 분모로 인식하는 데 어려움으로 작용할 수 있다. 본 연구에서는 s51 한명에서만 확인된 현상이지만, 지도상 이러한 어려움이 발생할 수 있음을 유의할 필요가 있다.

마지막으로, 조건부확률 교육과정 및 교과서 구현과 관련하여 빈도적 관점에서 조건부확률을 정의할 것을 제안하고자 한다. 이론적 배경에서 살펴보았듯이 상대도수의 극한을 이용한 빈도적 관점은 고전적 관점의 한계를 보완할 수

있다(Woo, 2017). 본 연구에서 큰 수의 법칙을 비형식적으로 학습한 고등학교 1학년 학생들이 교사의 적극적인 개입 없이도 ‘반복실험의 결과→조건부 상대도수→조건부확률’의 순서로 전개되는 빈도적 관점의 정의 방식을 충분히 이해할 수 있었다. 따라서 교과서에서 조건부확률을 상대도수의 극한을 이용하여 Table 2과 같이 빈도적 관점으로 도입하여 정의하고 그 후 등확률 유한 표본공간에 한해 $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 로 구할 수 있음을 소개하면, 지면의 증가 없이 조건부확률 개념을 자연스럽게 도입하면서 빈도적 접근과 고전적 접근을 연결할 수 있을 것이다.

본 연구는 수학 성취도가 평균 이상인 14명의 고등학생들의 추론을 분석한 결과임을 유의하여 해석할 필요가 있다. 성취도가 낮은 학생들은 비율추론을 이용한 조건부 상대도수의 구성이나 큰 수의 법칙을 비형식적으로 활용하는 부분에서 어려움을 겪을 가능성이 존재하므로 과제의 형태나 교사의 역할에 있어서 변화가 필요할 수 있다. 따라서 다양한 수준의 학생들을 대상으로 하는 후속 연구를 통해 조건부확률의 빈도적 도입의 가능성을 확인하고 논의점과 시사점을 도출할 필요가 있다. 조건부확률은 학생, 교사에게 모두 어려운 영역으로 알려져 있음에도 불구하고 상대적으로 다양한 연구가 이루어지지 못한 실정이다. 조건부확률의 오개념뿐 아니라 수업 환경 및 교수 전략에 관한 다양한 연구들이 수행되길 기대한다.

CONFLICTS OF INTEREST

No potential conflict of interest relevant to this article was reported.

REFERENCES

- Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.
- Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?. In *Exploring probability in school* (pp. 241-266). Springer, Boston, MA.
- Biehler, R. (1991). Computers in probability education. *Chance encounters: Probability in education*, 169-211.
- Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information—an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. *Frontiers in psychology*, 6, 1186.
- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (2).
- Borovcnik, M., & Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. In *Chance encounters: Probability in education* (pp. 73-105). Springer, Dordrecht.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1).
- Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In *Teaching Statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 85-95). Springer, Dordrecht.
- Cho, C. M. (2010). A Study on Conditional Probability. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 20(1), 1-20.
- 조차미(2010). 조건부확률에 관한 연구. *수학교육학연구*, 20(1), 1-20.
- Choi, I. Y. & Cho, H. H. (2017). An Analysis of Middle School Student's Eye Movements in the Law of Large Numbers Simula-

- tion Activity. *The Mathematical Education*, 56(3), 281-300.
- 최인용, 조한혁(2017). 큰 수의 법칙 시뮬레이션에서 중학생의 안구 운동 분석. *수학교육*, 56(3), 281-300.
- Diaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 131-162.
- Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. In *Probabilistic thinking* (pp. 75-99). Springer, Dordrecht.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297).
- Finzer, W., Erickson, T., & Binker, J. (2000). *Fathom*. Key Curriculum Press.
- Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational studies in mathematics*, 15(1), 1-24.
- Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). Brief report: The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for research in mathematics education*, 28(1), 96-105.
- Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychological review*, 102(4), 684.
- Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques a la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 15(1), 49-95.
- Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 339-370.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for research in mathematics education*, 487-519.
- Kolmogorov, A. N. (1956). Foundations of the theory of probability.
- Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology innovations in statistics education*, 2(1).
- Kim, W. K., Lim, S. H., Kim, D. H., Kang, S. J., Cho, M. S., Bang, K. S., Yoon, J. K., Shin, J. H., Kim, K. T., Park, H. J., Sim, J. S., Oh, H. J., Lee, D. K., Jung, J. H., & Heo, N. K. (2018). *Probability and Statistics*. Seoul: Bi-Sang Edu.
- 김원경, 임석훈, 김동화, 강순자, 조민식, 방금성, 윤종국, 신재홍, 김기탁, 박희정, 심주석, 오혜정, 이동근, 정재훈, 허남구(2018). *확률과 통계*. 서울: 비상교육.
- Ku, N., Tak, B., Choi, I., & Kang, H-Y. (2019). An analysis of preservice mathematics teachers' reading of curriculum materials: Focused on conditional probability. *The Mathematical Education*, 58(3), 347-365.
- 구나영, 탁병주, 최인용, 강현영(2019). 예비 수학교사들의 교육과정 자료 해석: 조건부확률을 중심으로. *수학교육*, 58(3), 347-365.
- Ku, N., Tak, B., Choi, I., & Kang, H-Y. (2020). An Analysis of Inservice Mathematics Teachers' Reading of Curriculum Materials: Focused on Conditional Probability. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 30(3), 487-508.
- 구나영, 탁병주, 최인용, 강현영(2020). 고등학교 수학교사들의 교육과정 자료 해석: 조건부확률을 중심으로. *수학교육학연구*, 30(3), 487-508.
- Lee, J. Y. (2005). Study on the understanding of conditional probability concept (Masters dissertation). *Seoul National University*, Seoul.
- 이정연(2005). *조건부확률 개념의 이해에 관한 연구*. 석사학위논문, 서울대학교, 서울.
- Lee, J. Y., Choi, B. R., Kim, D. J., Jeon, C., Chang, H. S., Song, Y. H., Song, J., & Kim, S. C. (2018). *Probability and Statistics*. Seoul: Chun-Jae textbook.
- 이준열, 최부림, 김동재, 전철, 장희숙, 송윤호, 송정, 김성철(2018). *확률과 통계*. 서울: 천재교과서.
- Lee, J. Y. & Woo, J. H. (2009). A Didactic Analysis of Conditional Probability. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 19(2), 233-256.
- 이정연, 우정호(2009). 조건부확률 개념의 교수학적 분석과 이해 분석. *수학교육학연구*, 19(2), 233-256.

- Lee, Y. K. & Cho, J. S. (2015). An Analysis on Abduction Type in the Activities Exploring 'Law of Large Numbers'. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 25(3), 323-345.
- 이윤경, 조정수(2015). '큰 수의 법칙' 탐구 활동에서 나타난 가추법의 유형 분석. *수학교육학연구*, 25(3), 323-345.
- Maxara, C., & Biehler, R. (2006, July). Students' probabilistic simulation and modeling competence after a computer-intensive elementary course in statistics and probability. In *Proceeding of the Seventh International Conference on the Teaching of Statistics* (pp. 1-6).
- McDowell, M., & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological bulletin*, 143(12), 1273.
- Ministry of Education. (2015). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education Notice, No. 2015-74 [Separate issue 8].
- 교육부(2015). *수학과 교육과정*. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8].
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- 류희찬, 조원영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 (공역) (2007). *학교 수학을 위한 원리와 기준*. 서울: 경문사.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., & Cobb, G. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40(2), 255-269.
- Sedlmeier, P., & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of experimental psychology: general*, 130(3), 380.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Stohl, H., & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 319-337.
- Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence?. In *Exploring Probability in School* (pp. 215-238). Springer, Boston, MA.
- Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 39-59.
- Tomlinson, S., & Quinn, R. (1997). Understanding conditional probability. *Teaching Statistics*, 19, 2-7.
- Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In *Exploring probability in school* (pp. 145-169). Springer, Boston, MA.
- Watson, J. M. (2013). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Routledge.
- Watson, J. M., & Kelly, B. A. (2007). The development of conditional probability reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(2), 213-235.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), 59-84.
- Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. *Educational studies in mathematics*, 33(2), 171-202.
- Woo, J. H. (2017). *Educational Foundation of School Mathematics (3)*. Seoul: Seoul National University Publishing Co.
- 우정호(2017). *학교수학의 교육적 기초 (하)*. 서울: 서울대학교출판문화원.
- Woo, J. H., Jung, Y. Y., Park, K. M., Lee, K. H., Kim, N. H., Na, K. S., & Yim, J. H. (2006). *Research methodology in mathematics education*. Seoul: KyungMoonSa.
- 우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈(2006). *수학교육학연구방법론*. 서울: 경문사.
- Yáñez, G. (2002). Students' difficulties and strategies in solving conditional probability problems with computational simulation.
- Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems: The role of representation in mental computation. *Cognition*, 98(3), 287-308.