Original Article

수학 학습에 기여하는 기호로서의 다이어그램에 관한 세 가지 관점

노정원¹, 이경화²⁺

¹서울대학교 대학원생, ²서울대학교 교수

Three Perspectives on Diagrams as Signs Contributing to Learning Mathematics

Jeong-Won Noh¹, Kyeong-Hwa Lee²⁺

¹Graduate Student, Seoul National University, ²Professor, Seoul National University, South Korea

Abstract

수학 학습 과정에서의 다이어그램의 역할에 관한 연구는 오랫동안 다양한 관점 아래에서 이루어져 왔지만 이러한 다양성에 관한 메타적인 논의는 충분히 이루어지지 않았다. 본 연구는 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계에 대한 다양한 접근 방식의 이면에 있는 인식론적인 가정에 관한 체계적인 논의를 진전시키는 데에 목표를 둔다. 이를 위해 수학 학습에서의 다이어그램의 역할에 주목한 이론적·실증적 연구 사례들에 관하여 기호로서의 다이어그램을 바라보는 관점에서의 차이를 중심으로 고찰하였다. 연구 결과 기호로서의 다이어그램과 수학 사이의 관계성을 바라보는 다양한 관점을 구조-기반 관점, 맥락-기반 관점, 그리고 물질-기반 관점으로 구분하는 틀을 도출하였다. 또한 각 관점의 연구들의 바탕에 놓인 인식론적인 배경과 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계를 설명하는 방식에서의 차이를 확인할 수 있었다. 본고에서 제시한 틀은 수학 학습 현상에서의 다이어그램의 역할에 대해 접근하는 데에 있어서 연구자들이 어떠한 이론적 렌즈를 통해 현상의 어떠한 측면에 주목하였는지에 관해 조망할 수 있도록 해준다.

핵심어: 다이어그램, 다이어그램적 추론, 기호, 기호학, 인식론적 관점

Although researchers have studied the contribution of diagrams to learning mathematics based on various perspectives, the meta-analysis of relevant studies is lacking. The purpose of this study is to advance the discussion of epistemological assumptions underlying various approaches to the relationship between diagrams and mathematics learning. To this end, we reviewed theoretical and empirical studies about the contribution of diagrams in mathematics learning, focusing on how they account for the relationship between diagrams as signs and mathematics. The review has led to a proposed framework that categorizes the perspectives on diagrams as signs in pertinent research into structure-based, context-based, and material-based perspectives. We further identified differences in the epistemological background upon which studies from the three perspectives are based and the way the perspectives describe the relationship between diagrams and mathematics learning. The framework was useful identifying the multidimensionality of mathematics learning related to diagrams as well as the use of theoretical lenses by researchers depending on specific aspects of mathematics learning.

Keywords: diagram, diagrammatic reasoning, sign, semiotics, epistemological perspective

Received: September 27, 2021 **Revised:** November 10, 2021 **Accepted:** November 15, 2021

Correspondence: Kyeong-Hwa Lee, khmath@snu.ac.kr

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2784-3409>

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>), which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
Copyright © The Korea Society of Educational Studies in Mathematics

I. 서론

대부분의 수학 교수-학습 과정에는 수학적 대상, 개념, 관계, 또는 구조에 대응하는 공간적인 표식으로서의 다이어그램¹⁾이 포함된다. 수학 학습 과정에서 다이어그램이 동원되는 것은 수학이라는 학문의 고유의 본질적인 특성이자 한계로부터 기인한다. 즉, 수학을 제외한 대부분의 과학 분야의 경우 해당 분야의 지식이 다루는 대상에 접근하는 데에 있어서 직접적인 관찰을 하거나, 상징적인 기호 체계를 통해 접근하는 등의 두 가지의 접근 방식이 가능하다 (Duval, 1999). 반면에, Peirce가 지적한 바와 같이 수학은 실체를 갖지 않는 “가설적인 상태의 대상에 대한 진리에 관한 연구” (CP 4.233)라는 점에서, “모든 실제적인 수학적 활동은 수학적 대상 자체보다는 그것에 대한 표현과 주어진 표현을 다른 것으로 지속적으로 변환시키는 과정과 관련된다” (Otte, 2006, p. 11). 특히 다이어그램은 “관찰 또는 지각의 요소를 포함하여 ‘예상치 못한 진리’를 드러낼 수 있는 잠재력을 가진다” (Otte, 2003, p. 183)는 점에서, Otte (2006)는 “수학은 본질적으로 다이어그램적 사고”라고 언급하기도 하였다(p. 14).

많은 수학교육 연구자들은 오랫동안 다이어그램 및 그것을 만들어내는 과정, 즉 다이어그램이 수학 학습에 어떻게 기여하는지에 관하여 연구해왔다(Arcavi, 2003; Bakker & Hoffmann, 2005; Clements & Battista, 1992; de Freitas & Sinclair, 2012; Duval, 1995; Fischbein, 1993; Herbst, 2004; Radford, 2010; Stylianou, 2002). 초기 수학교육 연구들은 주로 심리학 연구들의 영향을 받아 다이어그램을 인간의 정신적인 이미지(imagery)에 대한 시각화(visualization)의 산물로서 바라보는 관점에서 접근하였다(Sinclair & Bruce, 2015). 예를 들어 Piaget & Inhelder (1956)는 아동들이 도형을 다룰 때 위상적인 특성에 주목하는 것과 기하적인 성질에 주목하는 것 사이의 차이를 정신적인 발달 단계 상의 위계로 설명하였다. 이러한 경향은 잘 알려진 van Hiele (1985)의 학습 수준 모델에서도 나타나는데, 이와 같은 위계적인 접근을 취하는 연구자들은 학생들의 수학 학습을 한 수준으로부터 다음 수준으로 도약하는 것과 같이 설명하였으며, 이에 따라 특정한 수준에서의 학생들의 인지적인 특성을 마치 ‘스냅 사진’처럼 기술하였다(Clements & Battista, 1992; Sinclair & Bruce, 2015). 또한 이와 같은 전통적인 관점들에서 다이어그램을 다루는 과정은 마치 최종적으로 형식화 된 ‘진정한’ 수학에 다다르기 위해 거쳐야 하는 보다 하위 과정과 같이 고려되었다(Menz, 2015). 예를 들어 van Hiele의 모델에서 ‘시각적’ 단계는 ‘기술적/분석적’ 단계에 이르기 이전의 가장 초기 단계에 해당하며, 일정한 수준의 형식적인 표현을 다루는 단계에 도달하면 다이어그램과 같은 시각적인 수단은 불필요한 것처럼 여겨졌다.

하지만 관련 연구들은 점차적으로 직접 관찰이 불가능한 인간의 정신적인 측면과 관련된 요소뿐만 아니라, 다이어그램 자체와 그것을 다루는 실천적이고 물질적인 활동으로부터 수학적 사고와 학습이 촉발하고 진전되는 양상에 주목하기 시작하였다(Arcavi, 2003; Bakker & Hoffmann, 2005; Dreyfus, 1991; Herbst, 2004; Stylianou & Silver, 2004). 특히 다이어그램을 비롯한 기호를 다루는 인간 활동에 대한 조작적인 설명을 제공하는 기호학 이론들이 수학교육 연구에 본격적으로 도입되기 시작하면서, 관련 수학교육 연구들의 주요한 초점은 “난해하고 추상적이며 순수하게 정신적인 활동으로부터, 지각 가능하며 그에 따라 의사소통할 수 있는 대상, 즉 다이어그램적 표식에 대한 물질적

1) ‘다이어그램(diagram)’이란 단어는 그리스어에서 ‘선으로 표시된 기하적인 도형’을 의미하는 ‘diagramma’와 ‘선으로 표시하여 그리다’는 뜻의 동사 ‘diagraphen’으로부터 기원한다(Harper, 2001). 주로 명사 형태로 사용되어 왔지만 다이어그램을 생성하는 행위를 가리키는 동사로도 사용되어 왔다(Menz, 2015). 단어가 포괄하는 대상의 구체적인 범위 상에서의 차이가 있긴 하지만, 일반적으로 수학교육 연구자들은 “부분적인 요소들의 특정한 공간적 배열과 그들 사이의 관계성으로 이루어진 구조를 갖는 표식(inscription)” (Dörfler, 2016, p. 25)을 가리키는 의미에서 다이어그램이란 단어를 사용해왔다. 일부 연구들에서는 기하 도형이나 표, 그래프와 같이 관습적인 방식으로 특정한 정보를 표상하는 경우에 한하여 좁은 의미에서 사용되기도 하지만(e.g., Diezmann & English, 2001), 본 연구에서는 학생들의 수학적 활동 과정에 수반되는 공식적인 의미가 부여되기 이전의 비형식적인 표식들과 그것을 생성하는 행위로서의 동사적인 의미까지 포괄하는 넓은 의미에서 사용하고자 한다(Menz, 2015).

인 활동으로 전환”(Dörfler, 2005, p. 66)되었다.

기호학을 기반으로 하여 수학 교수-학습 과정에서의 다이어그램의 역할에 관해 설명하고자 시도한 수학교육 연구자들의 관점은 다양화되어 왔지만(Arzarello, 2006; Bussi & Marriotti, 2008; Duval, 1995; Godino et al., 2007; Iori, 2017; Otte, 2006; Radford, 2010; Sáenz-Ludlow & Presmeg, 2006; Santi, 2011), 다양화 된 이론적 관점들 사이에 구체적으로 어떠한 차이가 있는지에 대한 메타적인 논의는 부족한 편이다(Iori, 2017; Santi, 2011). 수학교육 연구 공동체에게 있어서 이론적 관점에서의 다양성은 복잡한 수학 교수-학습 현상에 접근하기 위한 풍부한 자원으로 간주될 수도 있지만 동시에 한계 역시 가져올 수 있다(Arzarello et al., 2007; Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006; Prediger et al. 2008; Scheiner, 2020). 즉, 서로 다른 관점에서 수행된 다양한 연구들 사이의 상호적인 연관성을 파악하기 어렵게 하며, 어떤 현상에 대해 협소하고 제한적인 설명만을 추구하도록 제약시킬 수 있다는 것이다. 이와 같은 한계를 극복하기 위해 다양한 관점들 사이의 상호적인 연결과 대화를 시도하는 작업의 필요성이 제기되는데, Prediger et al. (2008)은 서로 다른 이론들의 정체성과 차이점을 고려하면서 그들 사이의 대화를 추구하는 다양한 수준의 “네트워킹 전략”(p. 170)을 연결 가능성의 정도에 따라 체계화하여 제시한 바 있다. Scheiner (2020)는 이러한 네트워킹 전략을 도입하는 연구들이 주로 수렴적인 방향의 연결을 추구하는 경향이 있다는 점을 지적하며, 상반되는 이론적 입장과 개념들 사이의 갈등, 긴장, 또는 역설에 관하여 적극적으로 고찰하는 발산적인 전략을 통해 관련 이론의 진전을 추구하는 방안을 모색하였다. 그는 상반되는 이론들의 반대항에 해당하는 개념들을 상대적으로 연관 지어 위치시키는 작업을 통해, 서로 다른 이론들의 독립적이면서도 상호보완적인 종합을 추구할 수 있다고 지적하였다.

이상의 맥락에서, 본 연구의 목적은 수학 학습에 기여하는 기호로서의 다이어그램을 바라보는 다양한 관점들을 메타적으로 조망하는 틀을 제시하는 것이다. 이를 위해 본고의 II장에서는 먼저 기호로서의 다이어그램을 바라보는 서로 다른 관점을 구분하기 위한 기준을 도출하기 위하여 개념적인 분석을 수행한다. 개념 분석은 기존의 문헌들에 대해 숙고하여 어떤 영역에서의 개념이나 용어에 대한 서로 다른 사용 방식을 드러내고 설명 및 기본 가정에서의 일관성에 관한 문제를 제기하는 철학적인 연구 방법에 해당한다(Johnson, 1980; Machado & Silva, 2007; Yoon, 2006)²⁾. 본고에서는 Peirce의 기호학에서의 “다이어그램적 추론(diagrammatic reasoning)” (Dörfler, 2001, p. 39)의 수학교육적인 함의에 관해 논의한 이론적인 문헌들에 대해 고찰하여 기호로서의 다이어그램의 작동 방식 및 인식론적인 잠재성과 관련하여 주요하게 고려되는 몇 가지 측면들을 도출한다(Dörfler, 2001; 2005; Otte, 2006; Radford, 2008). 그리고 이러한 서로 다른 측면을 기준으로 하여 기호로서의 다이어그램을 바라보는 서로 다른 관점 사이의 구분 방식을 제시한다. 이어서 III장에서는 이러한 구분을 바탕으로 실제적인 연구 사례들에 대한 분석을 통해 각 관점의 연구들이 구체적으로 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계 및 다이어그램의 역할에 관하여 설명하는 방식에서의 차이에 관해 살펴본다. 그리고 이상의 논의 결과를 종합하는 틀을 제시한다.

본고의 연구 문제는 다음과 같다. (1) 수학 학습에 기여하는 기호로서의 다이어그램을 바라보는 관점은 어떻게 구분될 수 있는가? (2) 서로 다른 관점에서 수학 학습에서의 다이어그램의 기여에 대해 주목해 온 연구들이 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계에 대해 설명하는 방식에는 어떠한 차이가 있는가?

2) 포괄적인 의미에서 개념 분석은 이론적인 고찰을 통해 어떤 개념의 의미에 관해 성찰하는 것으로서 대부분의 연구자들이 수행하고 있는 작업에 해당한다(Racine, 2015). 수학교육 연구에서 개념 분석에 관한 방법론적인 논의는 찾아보기 어려운데, 일반적인 접근 방식은 특정한 목표와 범위 안에서 문헌들에 관하여 숙고하는 것이다(e.g., Yoon, 2006). 이와 같은 철학적인 연구 방법은 실증적인 근거에 기반을 두는 것이 아니라 일정 부분 연구자 개인의 직관과 통찰에 의존하기 때문에 무결한 타당성을 지니기는 어려우며 그 연구 결과는 사후적인 반박과 논쟁에 대해 열려 있다(Papineau, 2007).

II. 기호로서의 다이어그램에 관한 관점 구분

여러 연구자들이 Peirce의 기호학에서의 다이어그램적 추론에 관한 논의를 수학교육적으로 재해석하여 기호로서의 다이어그램이 어떠한 측면에서 수학 학습에 기여할 수 있는지에 관하여 논의하였는데, 연구자들에 따라 주로 주목하는 초점에는 차이가 있었다(Dörfler, 2001; 2005; Otte, 2006; Radford, 2008). Peirce는 다음의 발췌문과 같이 다이어그램의 구성 및 그것에 대한 실험, 그리고 관찰의 과정을 통한 추론이 새로운 수학적 발견의 가능성을 보장해 준다고 보았다.

어떻게 수학이 한편으로는 본질적으로 순수하게 연역적이며 의심할 여지가 없는 결론을 이끌어내면서도, 다른 한편으로는 여느 다른 관찰 과학들과 마찬가지로 풍부하며 명백하게 무한히 이어지는 일련의 놀라운 발견들을 제시할 수 있는지에 관한 문제는 오랫동안 수수께끼였다. 많은 이들이 이러한 역설을 해결하기 위하여 이러한 두 주장들 중 어느 하나를 무너뜨리는 등의 다양한 시도를 해왔지만 성공하지 못했다. 하지만 진실은 모든 연역적인 추론, 심지어 단순한 삼단논법조차도 관찰의 요소를 포함한다는 것이다. 즉, 연역적인 추론은 도상 또는 다이어그램을 구성하여 그것의 부분들의 관계가 추론의 대상의 부분들에 대한 완전한 유추를 나타내도록 하고, 상상을 통해 이러한 이미지에 대해 실험하고, 결과를 관찰함으로써 그 부분들 사이에 눈에 띄지 않고 숨겨진 관계들을 발견하는 것으로 이루어진다(CP 3.363).

이와 같은 다이어그램적 추론에 관한 Peirce의 논의를 재해석하는 데에 있어서, Dörfler (2001)와 같은 연구자는 수학적 추론 및 교수-학습 과정에서 나타나는 모든 시각적인 표식들이 수학적 개념 및 아이디어에 대한 탐구를 가능하게 하는 것은 아니라는 점에 강조점을 두었다. 즉, 수학적 활동의 맥락 내에서는 다이어그램이 기호로서 작동하기 위해 요구되는 필수적인 '다이어그램적 특성(diagrammaticity)'으로서의 구조가 있다는 것이다(Dörfler, 2005). 그는 다이어그램의 구조를 변형, 구성, 분해 또는 결합하는 등의 관습적인 규칙에 기반을 둔 조작적인 작업들이 존재하며, 이와 같은 특정한 조작이 동반하지 않는다면 Peirce가 말하는 다이어그램을 통한 추론은 효과적으로 작동하기 어렵다고 주장하였다. 즉, 다이어그램적인 추론을 수학적 활동으로 재해석할 때 중요하게 고려되어야 하는 측면은, 어떤 조작적인 활동의 결과에 대한 관찰을 통해 불변하는 속성으로서의 규칙성을 감지해내는 데에 있으며, 이는 다이어그램의 특정한 구조에 대한 인식에 기반하여 관습적인 조작을 적용하는 것을 통해 실현 가능하다는 것이다. 이처럼 Dörfler (2005)는 다이어그램을 수학 학습에서 기여하는 기호로서 고려하는 데에 있어서, 그것 자체의 구조적인 관계성과 함께 그것의 구조와 관련된 조작 규칙들로 구성되는 모종의 기호 체계를 상정하고 있다. 이에 따라 수학 학습에서 다이어그램이 효과적으로 기능하기 위해서는 다이어그램의 조작 가능한 구조적인 측면에 대한 이해가 선행되어야 하며, 이러한 측면은 서로 다른 기호 체계 사이의 조작적인 변환 가능성에 대해 인식하는 문제로도 연결된다(Dörfler, 2005).

반면에 Otte (2006)는 Peirce의 기호학을 수학교육에 관한 이론으로 받아들이는 데에 있어서, 수학 학습에 기여하는 모든 기호들이 기존에 주어져 있는 체계에 속하거나 관습적으로 확립된 규칙에 따라 설명될 수 있는 것은 아니라는 지점에 강조점을 두었다. 즉, 기호적인 활동 과정에는 관습적인 규칙을 따르지 않는 불완전한 표현 또는 우발적으로 생성된 표식 등의 비상징적인 기호들 역시 나타나며, 이들 역시 수학적 발견, 의사소통 및 지식 발달의 기초

를 형성하는 데에 있어서 중요한 역할을 수행한다는 것이다. Peirce의 기호의 유형 구분을 통해 설명하자면, 다이어그램은 실제로 그것이 동원된 상황적인 맥락에 따라 관습적인 기호로서의 상징뿐만 아니라 지각적, 형태적 유사성에 의존하는 도상(icon)이 될 수도, 또는 다른 무언가로 주의를 유도하는 지표(index)가 될 수도 있으며, 이는 다이어그램이 실제로 사용되는 방식에 달려있다(Otte, 2006). Otte (2006)는 Peirce의 기호학이 이러한 두 가지의 비상징적인 기호 유형을 도입함으로써, 은유와 같이 고정적이거나 확립된 규칙으로 환원되지 않는 역동적인 방식의 해석의 가능성을 받아들이고, 수학적인 담론 내에 새로운 아이디어나 가설이 도입될 수 있는 가능성에 대한 설명력을 갖추게 되었다는 점을 강조하였다. 즉, 수학적인 추론 및 학습 과정에서 다이어그램의 작동은 어떤 특정한 체계 내에서의 조작 규칙에 지배되는 고정적인 과정이 아니라 당면하고 있는 경험적인 맥락에 따라 고정(fixation)과 변형(transformation)의 사이를 변증법적으로 오가는 “살아있는 과정(living process)” (Otte, 2006, p. 18)으로 고려될 필요가 있다는 것이다.

한편, Radford (2008)는 Peirce의 다이어그램적 추론에 관한 논의의 핵심적인 부분으로서, Plato 이후로 철학 및 인식론적 논의에서 소외되어 왔던 지각 및 감각적인 행위의 인식론적인 중요성을 다시 전면에 내세운다는 점에 주목하였다. Peirce는 시각적인 배열로서의 다이어그램의 부분들 사이에는 “그것을 형성하도록 한 사전규칙(precept)에는 언급되지 않았던 새로운 관계”가 존재하며 이는 다이어그램적 실험과 관찰을 통해 발견될 수 있다고 지적하였다(CP 3.560). 여기서 Peirce가 말하는 ‘발견될 새로운 관계’는 인간의 의식 수준에서의 기호적인 경험에 앞서 존재하는 것으로 여겨진다(Radford, 2008). 즉, 이는 경험 세계에 존재하는 물질-감각적인 대상으로서의 다이어그램 자체에 잠재되어 있다고 볼 수 있다. 이러한 맥락에서 Radford (2008)는 Peirce의 논의에서 새로운 의미를 생산하는 다이어그램적 추론의 인식론적인 잠재성을 보장하는 근원은 Peirce가 제시한 존재의 기본 범주의 구분에서 가장 근본에 해당하는 1차적인 존재성에 해당한다고 지적하였다. Peirce가 말하는 1차성(firstness)이란 주체의 의식적인 사고의 영역에 포함되어 어떠한 의미가 결정 지어지기 이전에 존재하는 선-반성적이고(prereflexive) 비결정적인(indeterminate) 사물의 존재 자체를 말한다(Otte, 2006). 이처럼 Peirce의 논의에는 어떤 체계나 맥락 내에서 특정한 의미를 지니게 되기 이전의 경험 세계에 존재하는 물질적인 대상 자체로서의 다이어그램이 지닌 인식론적인 잠재성이 중요하게 고려되며, 이는 경험으로부터 지식에 이르기까지의 인식론적인 여정에 있어서 가장 기초적이고 근본적인 “비분석적인 마주침”(CP 1.306)의 단계에 주목할 필요성을 시사한다(Radford, 2008).

이상에서의 논의를 바탕으로, Peirce의 기호학에서의 다이어그램의 인식론적인 잠재성에 관한 논의를 수학교육적으로 재해석한 연구자들이 주목해온 서로 다른 초점으로서, (1) 어떤 체계를 이루는 관습적인 조작 규칙의 적용이 가능한 특정한 구조적인 표식으로서의 측면, (2) 역동적인 기호적인 활동 과정의 맥락에 포함된 경험적인 대상으로서의 측면, (3) 그리고 지각적인 관찰 및 실험을 가능하게 하는 물질-감각적인 대상 자체로서의 측면 등의 세 가지 초점을 도출해볼 수 있다.

본 연구에서는 이와 같은 세 가지 초점을 기준으로 기호로서의 다이어그램과 수학 사이의 관계성을 바라보는 서로 다른 관점을 세 가지로 구분해보고자 한다. 먼저 (1)의 측면과 관련하여 다이어그램을 어떤 체계를 이루는 관습적인 규칙에 따라 구성 및 변형 가능한 구조적인 대상으로 보고, 그것의 구조와 규칙 체계 사이의 관계에 주목하여 설명하는 관점이 있을 수 있다. 다음으로 (2)의 측면과 관련하여 학습 과정에서 다이어그램이 실제로 활용되는 구체적인 맥락에 주목하여 그것이 동원되는 수학적인 활동의 맥락에 따라 다이어그램과 수학 사이의 관계성이 역동적으로 변화하는 것으로 설명하는 관점이 있을 수 있다. 마지막으로 (3)의 측면과 관련하여 물질-감각적인 대상으로서의 다이어그램 자체에 새로운 수학적인 의미 생산의 잠재성이 내재되어 있다는 입장을 취하며 다이어그램이 그려지고 수

정되는 등의 그것 자체의 변화에 주목하여 설명하는 관점이 있을 수 있다. 이하에서는 편의상 이와 같은 세 가지 관점을 각각 (1) 구조-기반 관점, (2) 맥락-기반 관점, (3) 물질-기반 관점이라 부르기로 한다. 다음 장에서는 이와 같은 세 가지 관점을 기준으로 하여 수학 학습에서의 다이어그램의 기여에 주목해온 선행연구들이 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계를 설명하는 구체적인 방식 상에는 어떠한 차이가 있는지에 관하여 살펴본다.

III. 기호로서의 다이어그램에 관한 서로 다른 관점에서의 설명 방식

이 장에서는 이전 장에서 도출한 서로 다른 세 가지 관점 하에서 구체적으로 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계를 설명하는 방식에는 어떠한 차이가 있는지를 살펴보기 위하여, 각 관점을 취하고 있는 것으로 구분되는 실제적인 연구 사례들을 분석해보고자 한다. 분석 대상으로 삼은 연구 사례들의 경우, 다이어그램 및 다이어그램링 과정에 대한 실제적인 분석을 포함하고 있는 연구들 중에서 세 관점 사이의 차이를 보다 선명하게 드러낼 수 있는 연구들을 선택하여 일부를 본문에 제시하였다³⁾. 본 연구에서 도출한 세 관점의 구분이 보다 넓고 다양한 스펙트럼으로 나누어질 수 있는 모든 관점들을 포괄하는 것은 아니라는 점에서 수학 학습에서의 다이어그램의 기여에 주목해온 모든 연구들의 입장을 반드시 이러한 세 관점들 중 하나에 포함시킬 수 있는 것은 아니다⁴⁾. 다만 이러한 구분 시도는 포괄적인 수준에서 여러 연구들의 근간에 놓여 있는 인식론적인 가정에 관하여 조망해봄으로써 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계를 바라보는 다양한 관점들의 정체성과 그들 사이의 연결 지점을 파악하기 위한 기초 작업이 될 수 있다.

구체적으로 이하의 각 절에서는 먼저 각 관점에서의 연구들이 주로 바탕을 두고 있는 인식론적인 배경에 관하여 살펴본다. 기호로서의 다이어그램과 수학 사이의 관계성과 관련하여 연구자들이 취하고 있는 관점에서의 차이는 보다 근본적으로 수학 학습에 있어서의 기호의 역할에 관해 설명하는 방식에서의 차이로부터 기인한다는 점에서, 서로 다른 배경 이론의 영향을 살펴볼 필요가 있다. 또한, 이러한 서로 다른 인식론적 배경 아래에서 동일한 현상에 대해 연구자들이 주로 주목하게 되는 분석의 초점은 서로 달라지며, 이러한 차이는 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계를 설명하는 방식에서 있어서도 차이를 낳게 된다. 이에 따라 서로 다른 관점에서의 연구들이 수학 학습 자체를 개념화하는 방식 및 다이어그램의 역할에 대해 설명하는 방식에서의 차이에 관하여 살펴볼 필요가 있다. 덧붙여, 다이어그램과 관련하여 교사가 수행할 수 있는 역할에 대하여 설명하는 방식에서의 차이도 살펴보고자 한다.

1. 구조-기반 관점

구조-기반 관점은 다이어그램을 어떤 체계를 이루는 관습적인 조작 규칙에 따라 구성 및 변형 가능한 구조적인 대상으로 보고, 특정한 방식으로 조작 가능한 구조적인 요소들 사이의 관계가 수학적 의미를 표상하는 것으로 설명

3) 본 연구에서는 넓은 범위를 아우르는 포괄적인 다이어그램의 의미를 채택하였기 때문에, 이와 같은 의미에서의 다이어그램에 대한 분석을 포함하는 선행연구의 범위가 상당히 광범위하다. 특히, 많은 연구들에서 다이어그램, 그래프, 그림, 모델, 표현(representation), 예(example), 응답(response) 등의 다양하고 포괄적인 어휘들이 이러한 다이어그램들을 지칭하는 데에 사용되고 있으며, 관련 키워드가 제목이나 초록 등의 연구의 전면에 포함되지 않은 경우들도 상당하다는 점에서 키워드 검색과 같은 방식으로 문헌들에 대한 체계적인 검토를 통해 사례를 구분하는 방식의 작업을 시도하는 데에는 현실적인 한계가 있었다. 이에 따라 본 연구에서는 권위 있는 학술지에 게재된 주요 연구자들의 문헌들을 중심으로 해당 문헌들의 참고 문헌과, 또 해당 문헌들을 참고한 문헌들을 검토해나가는 눈덩이식 표집(snowball sampling) 방식으로 문헌들을 수집하여 질적으로 검토하였다. 특히 기호학 및 시각화, 기하 학습 등 직접적으로 관련되는 이슈를 다룬 주요 학술지의 특별호에 게재된 문헌들을 이와 같은 문헌 수집의 출발점으로 삼아 검토하였다(e.g., Educational Studies in Mathematics, 77(2-3); ZDM - Mathematics Education, 46(1); 47(3)).

4) 예를 들어, Godino et al. (2007)과 같은 연구자들의 경우 기호 체계의 의미 참조 규칙에 대한 초점을 유지하면서도 실천적인 과정의 역동적인 측면에도 동시에 주목했다는 점에서 구조-기반 관점과 맥락-기반 관점에 걸쳐진 중간적인 입장을 취하고 있다고 볼 수 있다.

하는 입장이다. 예를 들어, Margolinas & Wozniak (2014)의 연구에서 구슬이 꿰어진 실 모델을 따라 그린 학생들의 다이어그램에 대하여 관습적인 수직선 좌표 체계상의 규칙에 비추어 그것의 구조적인 요소들이 방향과 위치에 대한 정보를 적절하게 표상하고 있는지 여부에 따라 분석한 것은 구조-기반 관점에서의 접근이라 볼 수 있다(Figure 1). Steenpaß & Steinbring (2014)의 연구에서는 한 학생이 수직선을 해석하는 방식의 변화를 분석하였는데, 수직선을 이루는 구조적인 요소들을 낱말로 해석하는지 또는 상호적인 관계 속에서 모종의 체계를 이루는 상징적인 요소들로 해석하는지 여부에 주목하였다. 여기서 연구자들은 학생의 서로 다른 해석 방식이 개인이 가지고 있는 특정한 인지적인 틀에 기반하는 것으로 보고 있는데, 이러한 참조 틀의 유형을 다이어그램의 구조적인 측면에 대한 이해 방식에 따라 구분했다는 점에서 구조-기반의 관점에서 접근한 것이라 볼 수 있다. Mulligan et al. (2020)은 기하적 패턴의 구조에 대한 아동들의 인식 발달을 위한 중단적인 프로그램 과정을 연구하였는데, 그 과정에서 아동들이 그린 다이어그램은 패턴의 규칙적인 반복, 대칭, 균등한 분할 등을 공간적인 구조에 반영한 정확도에 따라 수준이 구분되었다(Figure 2).

이러한 접근을 취하는 연구들은 다이어그램과 수학 사이의 관계성을 설명하는 데에 있어서 다이어그램의 구조적

Figure 1 (a) A diagram not containing representations of orientation and position; (b) A diagram containing only a representation of position; (c) A diagram containing both representations of orientation and position (Margolinas & Wozniak, 2014, pp. 35–36; p. 40)

Figure 2 Classification of students' responses to the task of embedding triangles in a hexagon (Mulligan et al., 2020, p. 672)

인 조직화와 담론적인 기능에 초점을 맞춘다(Santi, 2010). 이와 같은 접근 방식에 배경을 제공하는 대표적인 이론적 연구로서 Duval (1995; 2006)의 기호적 표현 레지스터 이론(Theory of Register of Semiotic Representation, 이하 TRSR)이 있다. TRSR에서 기하적 도형이나 데카르트 그래프, 수직선과 같은 수학적 다이어그램은 제각기 고유한 표현 역량과 특정한 변환 규칙을 가지고 있는 기호 체계인 ‘레지스터’에 속한 기호로서 고려된다. 이러한 관점의 연구들에서 다이어그램과 관련된 주요한 분석 초점은 해당 기호 체계를 이루는 조작 규칙의 적용 가능성과 관련하여 다이어그램의 구조상의 표현 요소를 체계적으로 식별하는 문제와 관련된다. TRSR에서는 이와 같은 기능을 하는 다이어그램의 구조적인 요소를 가리켜 “형상적 단위(figural unit)”라 지칭하였다(Duval, 1995, p. 145). 예를 들어, Margolinas & Wozniak (2014)의 분석에서 실의 방향을 나타내는 매듭과 같은 표현, 위치를 나타내는 구슬의 색깔 구분 등의 표현 요소들이 형상적 단위에 해당한다고 볼 수 있다(Figure 1). Steenpaß & Steinbring (2014)의 연구에서는 사전 분석을 통해 수직선의 형상적 단위에 해당하는 주목할 만한 구조적인 요소들의 목록을 제시하였다(Figure 3). 연구자들은 완전하고 객관적인 요소들의 목록을 만드는 것은 불가능하며 이들에 대한 해석은 다양할 수 있다는 점을 인정하면서도, 주어진 요소들 사이의 상호적인 관계성으로부터 수학적 기호 체계가 구성된다는 점에서 이들을 사전에 식별해야 할 필요성을 강조하였다.

이러한 관점의 연구들에서는 수학 학습을 다이어그램의 구조적인 관계성 및 그것의 구조에 적용 가능한 체계적인 조작 규칙에 관한 이해가 발달해 나가는 인지적인 과정으로서 설명한다. TRSR에서 핵심적인 학습 요소로 강조되는 것은 한 레지스터 내에서 동일한 대상을 나타내는 표현들 사이의 처리(treatment) 및 서로 다른 레지스터(e.g., 시각적 레지스터와 담론적 레지스터)에 속하는 표현들 사이의 변환(conversion)과 같은 조작을 적절하게 이해하고 활용할 수 있는지 여부이다(Duval, 2006). 예컨대 특정한 이차함수를 나타내는 다이어그램과, 동일한 수학적 대상을 나타내지만 다른 레지스터에 속하는 기호적 표현에 해당하는 대수식 사이의 관계는 Figure 4와 같이 나타낼 수 있는데, 이 때 다이어그램의 구조적인 요소들과 관련된 조작 규칙들을 대수식의 요소들과 대응시켜 이해할 수 있어야 한다. Presmeg (2008)는 학생들의 함수 이해 수준을 이러한 처리 및 변환 가능성에 대해 인식하고 있는 정도에 따라 단계적으로 제시하기도 하였다. Margolinas & Wozniak (2014)의 경우 학생들의 다이어그램의 효과성을 기수와 서수로서의 수의 기본 속성에 대한 개념 인식이 발달하는 과정과 연관 지어 논의하였다. Steenpaß & Steinbring (2014)은 학생이 수직선의 구조적인 측면을 해석하는 방식에서의 차이가 개인의 해석 스킴으로부터 기인하는 것으로 설명했으며, Mulligan et al. (2020) 역시 학생들의 수준의 변화를 패턴 구조의 규칙성에 관한 인식이 발달해나가는 과정으로 보았다.

이와 같은 방식의 설명에서 수학 학습 과정에서의 다이어그램의 역할은 그것의 부분들 사이의 구조적인 관계와 특

Figure 3 (1) The first long bar; (2) the single scaling bars; (3) the different lengths of the scaling bars; (4) the arc; (5) the basic unit (Steenpaß & Steinbring, 2014, p. 6)

Figure 4 Two symbolic signs in different registers for the same mathematical object (Presmeg, 2006, p. 21)

정한 조작 하에서 불변하는 성질 등에 의해 수학적 대상에 접근할 수 있도록 해주는 참조 수단에 해당한다. 이러한 설명은 기호 체계를 구성하는 규칙이나 구조적인 관계성 등을 고려한 의도적인 조작을 통해서만 다이어그램이 적절하게 기능할 수 있다고 본다는 점에서, 다이어그램 자체보다는 그것의 구조에 관한 규칙들로 이루어진 기호 체계 쪽에 보다 주요한 역할을 할당하고 있다고 볼 수 있다(Iori, 2017). 이에 따라, 다이어그램의 구조적인 관계성 및 조작 규칙에 관한 이해를 도울 수 있는 교사와 같은 전문가에 의한 적극적인 교수학적 개입의 필요성이 제기된다. 예를 들어 TRSR에서 설명하는 다이어그램의 처리나 다른 기호적 표현으로의 변환과 같은 조작은 기호 체계에 관하여 불완전하게 이해하고 있는 학습자 수준에서는 자발적 또는 즉흥적으로 일어나기 어렵다(Santi, 2010). Steenpaß & Steinbring (2014)은 다이어그램을 “시각적인 보조물(visual aids)” (p. 3)이라 표현하면서 그것 자체만으로는 수학적 의미 전달될 수 없으며 교사가 주도하는 담론적인 맥락이 핵심적인 역할을 한다고 지적하였다. Margolinas & Wozniak (2014)의 경우 교사의 직접적인 지도가 아닌 주어진 교수학적 상황 맥락을 통한 간접적인 개입 전후의 변화에 주목하였는데, 결과적으로 이러한 활동만으로는 수직선과 서수의 개념 이해를 돕는 데에 한계가 있었다고 결론 내렸다. Mulligan et al. (2020)의 연구는 종단적인 프로그램의 결과에 대한 분석에 초점을 맞추어 교사를 통한 교수학적 개입 과정에 대한 구체적인 분석은 포함시키지 않았지만, 프로그램 도입 시에 교사들에게 주어진 가이드라인이나 전문성 향상을 위한 워크숍 등에 대해 비중 있게 언급했다는 점에서 마찬가지로 적극적인 교수학적 개입의 중요성을 강조했다고 볼 수 있다.

2. 맥락-기반 관점

맥락-기반 관점은 다이어그램이 지닌 기호적인 관계성을 수학 학습 과정에서 그것이 동원되는 실천적인 수학적 활동의 맥락에 의존하여 설명하는 입장을 말한다. 이러한 설명 방식은 주로 Vygotsky (1986)의 영향 하에서 기호에 대한 사회-문화적인 접근을 취해 온 수학교육 연구들에서 살펴볼 수 있다(e.g., Arzarello, 2006; Bussi & Marriotti, 2008; Radford, 2009; 2010; 2015). 이와 같은 접근을 취하는 연구들에서의 분석은 다이어그램 자체의 구조적인 특성보다는 그것이 생성되고 활용되는 활동 과정을 둘러싼 사회-문화적인 맥락에 주된 초점이 맞춰지며, 이에 따라 형

태적으로 동일하거나 유사한 다이어그램일지라도 그것이 포함된 맥락에 따라서 기호적인 지위 및 역할이 다른 방식으로 설명된다. 예를 들어, Bussi & Baccaglini-Frank (2015)의 연구에서 학생들이 활동 초기에 그린 화살표는 활동에 사용된 로봇에 달려있는 명령 버튼을 따라 그린 도상적인 기호로 해석되었지만 이후 활동 과정에서 나타난 화살표들은 로봇의 이동을 나타내는 지표적인(indexical) 기호로도, 직각이라는 기하적인 의미를 갖는 상징적인 기호로도 분석되었다. 또한 맥락-기반 관점의 연구들에서는 학생들이 활동 중에 생산한 비형식적인 표현들에 대하여 수학적인 사고 및 이해가 발달해나가는 상호작용 과정의 맥락에서 그것이 지닌 잠재적인 수학적 의미를 보다 적극적으로 해석하고 받아들인다. 이러한 경향은 앞서 살펴본 구조-기반 관점의 연구들에서 특정 시점에서의 학생들의 불완전한 다이어그램을 그들의 이해 수준의 문제와 연관 짓고 적극적인 교수학적인 개입의 필요성을 강조했던 것과는 차이를 보인다. 예를 들어, Radford (2009)의 사례에서 학생들이 비형식적인 방식으로 인물의 이동을 표현한 다이어그램의 경우 학생들이 이전에 그래픽 계산기로 생성한 직교 좌표계의 그래프보다 불완전하게 시간과 위치에 대한 정보를 표현하고 있었지만, 그것을 그리는 과정에서의 학생들 사이의 구체적인 상호작용 및 화살표나 제스처 등의 기호 사용 방식에 관한 보다 상세한 분석이 제시되었다(Figure 5).

이와 같은 관점에서 수학 학습은 특정한 실천적인 맥락 내에서 다이어그램과 같은 기호가 동원되고 활용되는 방식이 점진적으로 변화하는 변증법적이고 역동적인 과정으로 설명된다. 예를 들어, Radford (2010; 2015)는 수학 학습을 학생들의 수학적 활동에 내포된 어떤 가능성으로서의 불완전한 문화적 지식이 점차 어떤 단일한 관습적인 형식으로 결정되어 가는 대상화(objectification) 과정으로 설명하였다. 그에 따르면 이러한 과정은 단순히 어떠한 관념적인 지식을 획득하는 것을 통해서가 아니라 교사 및 또래 집단과 문화적인 인공물 등과의 역동적이고 사회적인 상호작용을 통해 실현되며, 다이어그램을 비롯한 감각적인 기호들이 이 과정을 매개한다(Figure 6). 이러한 설명에서 다이어그램과 수학적인 대상 사이의 관계는 사회적, 역사적으로 성문화된 행동과 사고의 형식으로서의 사회적인 실천을 통해서만 드러나며, 이러한 관계성은 활동 자체에 내포되어 있기 때문에 그것으로부터 분리될 수 없다.

Bussi & Marriotti (2008)의 경우 보다 구체적으로 특정한 문화적인 인공물을 도입한 교실 맥락 내에서의 수학 학습 과정에 초점을 맞추었는데, 이러한 맥락에서의 수학 학습은 인공물을 가지고 수행하는 활동, 그 활동을 통한 개인적인 기호의 생산, 그리고 수학적인 논의를 통한 집단적인 기호의 생산 등의 과정들이 순환적으로 반복되는 “교수학적 순환” (Bussi & Marriotti, 2008; p. 15)을 통해 학생들의 기호 사용 방식이 점차 정교화 되는 과정으로 설명된다. 이 때, 동적 기하 소프트웨어나 교재 등에 주어진 수학-문화적인 인공물로서의 다이어그램은 한편으로 특정한 수학

Figure 5 A Graph created with a graphic calculator and an informal diagram drawn by students (Radford, 2009, p. 471; p. 475)

Figure 6 Socio-cultural contexts of classroom activities in which the objectification process takes place (Radford, 2015, p. 556)

Figure 7 The double semiotic potential of an artifact (Bussi & Marriotti, 2008, p. 754)

적 지식과의 문화적으로 결정화 된(crystallized) 기호적 관계성을 지니며, 다른 한편으로는 그것을 활용하는 과제와의 연관을 통해 비형식적인 개인적인 기호를 우발적으로 출현시킬 수 있는 이중적인 기호적 잠재성을 지니고 있는 것으로 설명된다(Figure 7).

이와 같이 맥락-기반의 접근을 취하는 연구들에서 다이어그램은 학습자의 개인적인 차원과 수학적 실천의 사회-문화적인 차원 사이를 매개하는 역할을 수행하는 것으로 설명된다. 예컨대, Chen & Herbst (2013)이나 Lee et al. (2020)과 같은 연구들에서 의도적으로 일부 요소를 생략한 불완전한 형태의 다이어그램이 주어졌을 때 학생들은 언어, 제스처를 비롯한 다양한 기호적 자원들을 동원하여 다이어그램과 상호작용 하면서 가설적인 수학적 대상이나 관

계성에 대한 탐구에 참여할 수 있었다. 이처럼 교사를 통해 학생들에게 직접 주어지거나 교재에 포함된 교수학적인 인공물로서의 다이어그램은 학생들의 개인적인 기호 생산을 촉진시켜 수학적 활동에 참여할 수 있도록 이끄는 촉매로서 역할한다(Bussi & Marriotti, 2008). 한편 이러한 인공물을 도입한 활동 과정에서 학생들이 우발적으로 생산하는 비형식적인 기호로서의 다이어그램은 교사 또는 또래에 의한 적절한 식별과 활용을 통해 점진적으로 수학적 의미의 결정되어 가는 개인적, 집단적 기호로서 학습에 기여한다. Bussi & Marriotti (2008)는 학생들의 비형식적인 표현이 실천적인 활동 자체를 자연스럽게 참조하는 동시에 부분적으로 수학적인 담론에서의 의미까지 지시하는 이중적인 의미를 지니게 될 때, 이를 ‘축 기호(pivot sign)’라 지칭하며 학생들의 기호 사용 방식의 변화를 촉진하는 핵심적인 역할을 수행한다고 설명하였다. 이와 같은 맥락-기반 관점에서의 설명에서 교사의 역할은 다이어그램과의 상호작용이 포함된 활동의 설계 및 실행과 관련하여 다양한 수준에서 고려된다. 일부 연구자들은 학생들 사이의 상호작용 과정에 보다 주목하여 교사의 역할을 간접적으로만 언급한 경우도 있는 반면(e.g., Lee et al., 2020; Radford, 2009), 어떤 연구자들의 경우 다이어그램의 기호적 잠재성을 활용하는 교사의 역할에 대해 보다 적극적으로 분석하기도 하였다(e.g., Chen & Herbst, 2013; Bussi & Baccaglini-Frank, 2015). 하지만 대체로 실천적인 기호 사용 방식의 변화에서 교사의 역할이 필요하다는 점은 공통적으로 지적되는데, Bussi & Mariotti (2008)는 이러한 교사의 역할을 앞서 살펴본 다이어그램의 이중적인 기호적인 잠재성에 관해 미리 알고 있으며 그것을 활성화시킬 수 있는 “문화적 중재자” (p. 754)라고 언급하기도 하였다.

3. 물질-기반 관점

수학 학습 과정에서의 다이어그램의 역할에 주목한 일부 연구들은 다이어그램을 둘러싼 기호 체계나 사회-문화적인 맥락이 아닌, 물질적인 대상으로서의 다이어그램 자체와 그것과의 물질적인 상호작용 과정으로부터 새로운 수학적 의미가 생산될 수 있다고 보는 물질-기반의 관점을 취한다. 예를 들어, Thom & McGarvey (2015)은 학생들이 다양한 기하적 도형들을 그리는 활동을 기록한 영상, 녹음 및 그려진 그림들 자체와 현장 메모 등의 다층적인 데이터를 기반으로 다이어그램이 그려지는 물질적인 과정을 세밀하게 분석하였는데, 이러한 과정에서 학생들이 미처 의도하지 않은 새로운 기하적인 의미가 우발적으로 창발했다는 점에 주목하였다(Figure 8). de Freitas et al. (2019)의 경우 두 학생이 함께 공학적 도구를 활용하여 그래프를 그리는 활동 과정에서 그들의 미세한 신체적인 움직임이 조정되

Figure 8 Part of a diagramming sequence in which a student divided a hexagon into triangles (Thom & McGarvey, 2015, p. 477)⁵⁾

5) 이 사례에서 학생은 이전 과제에서와 동일한 방식으로 사각형을 가로지르는 대각선을 굵다가 그것의 연장선이 의도하지 않았던 다른 삼각형들까지 만들어내는 것을 보고 (Figure 8 (g)에서) 깜짝 놀라는 반응을 보였다.

어 가는 과정을 초 단위의 시간 경과에 따라 상세히 분석하였다(Figure 9). 이러한 연구들은 공통적으로 완성된 다이어그램뿐만 아니라 그것이 그려지고 수정되는 다이어그램밍 과정의 순간순간의 신체적인 움직임과 물질적인 변화에 대한 분석을 포함하고 있으며, 그러한 물질적인 과정으로부터 학습자들이 기존에 의식하거나 인지하지 못했던 새로운 수학적 의미가 표면적으로 현실화되는 장면에 주목하였다.

이와 같은 접근을 취하는 연구들이 직·간접적으로 기반을 두고 있는 인식론적인 배경은 이미 결정된 의미를 표상하거나 다른 무언가를 연상시키는 것으로서의 통상적인 기호 개념을 확장하여, 기존에 주어진 규칙, 체계, 또는 담론적 맥락으로부터 벗어난 새로운 의미 생산을 가능하게 한다는 의미에서의 비표상적인(non-representational) 기호 개념을 제안한 Deleuze (1994; 2000)의 철학이다. Deleuze가 말하는 기호란 어떤 체계나 맥락에 따라 결정된 의미로서 현실화되기 이전의 유동적이고 강도적인 힘으로서의 잠재성을 지니고 있어, 그것과 마주했을 때 명확하게 포착되거나 의식되지 않지만 기존과는 다른 차별적인 감각을 불러일으키는 물질적인 대상을 가리킨다(Gim & Bae, 2011; Moon & Lee, 2020; Noh & Lee, 2016). 수학철학자 Châtelet (2000)는 Deleuzean 철학의 기반 하에서 수학사의 사례들 속에서의 다이어그램의 물질적인 차원 및 신체적인 제스처의 역할을 적극적으로 재해석해냈으며, de Freitas & Sinclair (2014)는 이러한 관점을 수학 교수-학습 현상에 적용하여 포괄적 유물론이라고 하는 새로운 수학교육 이론을 제시하였다. 앞서 언급한 Thom & McGarvey (2015)나 de Freitas et al. (2019) 등의 연구들 역시 Châtelet (2000)의 이론이나 포괄적 유물론을 중요한 이론적 배경으로 참조하고 있으며, 점차 관련 연구들이 증가하고 있는 추세이다(Ferrara & Ferrari, 2017; Moon & Lee, 2020; Noh et al., 2021; Sinclair et al., 2013; Sinclair et al., 2020).

이와 같은 관점에서의 연구들은 알지 못했던 새로운 수학적 의미에 대해 알아차리게 되는 인식론적인 사건이 기존의 안정적이던 물질-감각적인 습관의 순간적이고 우발적인 변화로부터 촉발한다고 설명한다. 수학 학습 과정은 어떤

Figure 9 Part of the analysis of gestures and movements of two students drawing graphs using technological tools (de Freitas et al., 2019, p. 313; p. 315)

방식으로든 습관의 변화를 수반하게 되는데, 습관은 우리의 의식을 초월하는 측면을 가지고 있다는 점에서 학습 주체가 의식적으로 인지하지 못하는 비인지적인 차원에 대한 설명을 필요로 한다(Otte, 2006). 이러한 측면은 구조-기반 또는 맥락-기반의 관점을 취하는 접근들에서 충분히 설명되기 어려운데, Radford (2010)는 창의적인 깨달음의 순간의 불가해한 측면에 대하여 “시적인 사건” 또는 “심미적 경험” 등의 표현을 사용하여 언급한 바 있다(p. 6). 이에 대하여 포괄적 유물론과 같이 Deleuzean 철학에 기반을 둔 연구들에서는 수학 학습 과정의 물질적인 차원에 주목하여 다이어그램 및 학습자의 신체를 포함하는 여러 물질들이 이루는 공간적인 배열의 변화로부터 물질적인 기호들 내에 잠재되어 있던 비결정적인 의미가 현실화된다는 설명을 제안한다. 예를 들어, 종이나 칠판 또는 스크린 위의 다이어그램을 특정한 방향으로 응시하는 등의 작은 움직임에서부터 그것과의 물리적인 거리를 조정하거나 직접적인 변형을 가하는 등의 직·간접적인 다이어그램링 과정 모두가 수학 학습을 촉발시킬 수 있는 물질적인 배열의 변화에 해당할 수 있다(Menz, 2015; Noh et al., 2021). 이러한 다이어그램링 과정에서 물질적인 요소들 사이의 관계는 기존에 이루고 있던 안정되고 자연스러운 관계성으로부터 벗어나 서로를 변화시키며 새로운 가능성을 지속적으로 생산해낼 수 있다는 것이다(Sinclair et al., 2020). Thom & McGarvey (2015)의 연구에서 학생이 우발적으로 연장선을 그리며 의도하지 않았던 새로운 분할 전략을 알아차리게 됐던 사건이나, de Freitas et al. (2019)의 연구에서 학생들이 서로의 신체적인 움직임으로부터 영향을 받아 명시적으로 언급했던 계획과 다르게 움직임을 조정했던 사례 등이 이러한 설명을 뒷받침한다.

물질-기반 관점에서의 연구들은 학생들이 주체적으로 다이어그램과의 상호작용 과정에 참여할 뿐만 아니라, 수정되거나 그려지고 있는 다이어그램의 물질적인 변화 및 신체적인 움직임 자체가 다시 학생들의 움직임에 영향을 미치고 새로운 수학적 발견을 이끈다고 설명한다는 점에서 특징적이다. 이와 같은 방식의 설명은 다이어그램의 역할을 학습자나 교사 등의 인간 주체에 종속된 수동적인 대상이나 이들 사이의 상호작용을 중재하는 매개물로서의 역할을 넘어서서, 사고와 학습 자체를 촉발시키는 행위성(agency)을 지닌 행위 주체 중 하나로서 고려하고 있다고 볼 수 있다(Latour, 2005). 이에 따라 이러한 연구들에서의 분석은 주로 미시적인 수준에서 학습자와 다이어그램 사이의 직접적인 상호작용 과정에서 포착되는 우발적인 변화에 초점을 맞추며, 교사의 역할은 특정한 교수학적 설계를 통해 물질적인 환경을 조성하거나 활동 중간에 물질적인 배열의 변화를 유도하는 등의 상대적으로 소극적인 개입의 수준에서 고려되는 경향이 있다. 예를 들어, Thom & McGarvey (2015)의 경우 교사나 연구자의 개입이 최대한 배제된 상태에서의 학생들의 다이어그램링 과정에 대해 분석하였으며, de Freitas et al. (2019)의 경우 교사가 참여한 초기 활동과 비교하여 이후에 두 학생만 참여한 활동에서의 신체적인 움직임의 변화에 대하여 보다 상세한 분석을 제시하였다.

4. 요약

이상의 논의를 바탕으로 수학 학습에 기여하는 기호로서의 다이어그램에 관한 세 가지 관점 사이의 구분을 Table 1과 같은 틀로 정리해볼 수 있다.

먼저 구조-기반 관점을 취하는 연구들은 기호에 대한 구조-기능적 접근의 기반 하에서, 다이어그램이 모종의 체계를 이루는 관습적인 조작 규칙이 적용 가능한 구조적인 관계성을 통해 수학적 의미를 표상하는 것으로 설명한다. 이러한 관점의 연구들은 체계적인 조작 가능성과 관련하여 완성된 다이어그램에 포함된 구조상의 표현 요소들을 주요한 분석 대상으로 삼는다. 또한 수학 학습은 다이어그램이 속한 기호 체계 및 조작 규칙에 대한 이해가 발달해나가는 인지적인 과정으로서 고려된다. 이에 따라 다이어그램의 역할은 구조적인 관계와 특정한 조작 규칙 등에 의존하여

Table 1 A framework that distinguishes the three perspectives on diagrams as signs that contribute to the process of learning mathematics

	구조-기반 관점	맥락-기반 관점	물질-기반 관점
다이어그램-수학 사이의 관계성	체계적으로 조작 가능한 구조적 요소들 사이의 관계	포함된 활동 맥락에 따라 역동적으로 변화	물질성 자체에 새로운 수학적 의미 생산의 잠재성이 내재
인식론적 배경	구조-기능적 접근(e.g., Duval, 1995; 2006)	사회-문화적 접근(e.g., Bussi & Marriotti, 2008; Radford, 2010)	비표상적 기호론(Deleuzian 철학)
분석의 초점	완성된 다이어그램의 공간적 구조상의 표현 요소	다이어그램의 실천적인 사용 방식	새로운 다이어그램이 생성되는 물질적 사건
수학 학습에 대한 개념화	기호 체계 및 조작 규칙에 관한 이해가 발달하는 인지적인 과정	실천적 측면에서 기호 사용의 점진적 변화가 관찰되는 사회적인 과정	비의도적 또는 우발적인 습관의 변화가 창발하는 물질-감각적인 과정
다이어그램의 역할	특정한 조작에 의존하는 참조적인 수단	상호작용의 매개체	학습을 촉발시키는 행위주체
다이어그램과 관련된 교사의 역할	다이어그램의 구조적인 관계성 및 조작 규칙의 이해와 관련된 적극적 개입	다이어그램의 기호적 잠재성을 활성화시키는 문화적 중재자	물질적인 학습 환경의 조성 및 물질적인 배열의 변화 유도

수학적 대상에 접근할 수 있도록 해주는 참조적인 수단으로서 고려되며, 이러한 역할이 적절하게 수행되기 위해서는 교사에 의한 적극적인 개입이 필요하다는 점이 강조된다.

다음으로 맥락-기반 관점의 연구들은 다이어그램과 수학 사이의 관계성을 그것이 동원되는 수학적 활동의 실천적인 맥락에 의존하여 설명한다. 이러한 관점에서의 연구들은 기호에 대한 사회-문화적인 접근을 주요한 배경으로 하여 교수학적인 인공물로서의 다이어그램이나 학생들의 비형식적인 표현 내에 포함된 다이어그램 등이 실제로 활용되는 방식에 주목한다. 이와 같은 관점에서 수학 학습은 실천적인 맥락 내에서 다이어그램을 비롯한 기호 사용 방식이 점진적으로 변화해나가는 사회적인 과정으로 고려된다. 이러한 과정에서 다이어그램은 학습자와 수학-문화 사이의 매개물로서 역할하며 이러한 역할은 교사와 학습자 사이의 상호작용을 통해 활성화 된다.

마지막으로 물질-기반 관점의 연구들은 다이어그램의 물질성 자체에 새로운 수학적 의미 생산의 잠재성이 내재되어 있다는 입장을 취한다. 이러한 관점은 Deleuze의 비표상적 기호론의 영향 하에 있으며 연구의 초점은 다이어그램이 그려지고 수정되는 물질적인 사건 자체에 맞춰진다. 이와 같은 관점에서 수학 학습은 다이어그램 및 학습자의 신체를 비롯한 물질들의 배열이 변화하는 과정에서 잠재되어 있던 비결정적인 의미가 현실화되는 사건으로 설명되며, 이는 물질-감각적인 습관의 우발적인 변화로서 포착된다. 이러한 접근 하에서 다이어그램은 수동적인 대상이나 매개물로서의 역할을 넘어 수학적 사고와 학습 자체를 촉발시키는 주체적인 역할을 하는 것으로 고려된다.

IV. 결론 및 논의

본 연구에서는 선행연구들에 대한 고찰을 통해 기호로서의 다이어그램을 바라보는 서로 다른 관점을 구조-기반 관점, 맥락-기반 관점, 그리고 물질-기반 관점 등의 세 가지로 구분하는 틀을 제시하였다(Table 1). 이러한 세 관점 사이의 구분은 수학 학습 과정에서 역할하는 기호로서의 다이어그램을 어떤 기호 체계를 이루는 조작 규칙이 적용 가능한 구조적인 대상으로 보는지(구조-기반), 그것이 포함된 수학적 활동의 맥락에 따라 다른 유형의 기호로서 작동하는 것으로 보는지(맥락-기반), 또는 이미 결정된 다른 무언가를 표상하는 것이 아닌 그것의 물질성 자체에 새로운 의미를 생성할 수 있는 잠재성을 지니고 있는 것으로 보는지(물질-기반)에 따라 구분된다. 이와 같은 구분을 바탕으로 각

관점의 연구들의 기저에 있는 인식론적인 배경과 다이어그램과 수학 학습 사이의 관계에 관하여 설명하는 방식에 있어서의 차이를 확인할 수 있었다.

본고에서 제시한 틀은 다이어그램의 역할과 관련하여 수학 학습이라는 현상이 지닌 복잡성과 다면성을 드러내며, 이에 관하여 연구자들이 어떠한 이론적 렌즈를 통해 현상의 어떠한 측면에 주목하여 접근해왔는지에 관하여 조망할 수 있도록 해준다. 즉, 다이어그램과 수학 사이의 관계성을 어느 관점에서 바라보는지에 따라 수학 학습 과정에서의 다이어그램의 기여에 관한 연구자들의 초점은 기호 체계에 대한 인지적인 이해의 차원(구조-기반), 수학적 활동 내에서의 실천적인 기호 사용 방식의 차원(맥락-기반), 또는 학습자의 신체 및 다이어그램의 물질적인 움직임의 차원(물질-기반)에 맞춰진다. 이상의 논의를 종합하여 선행연구들이 고려하고 있는 요인들을 하나의 포괄적인 구조 내에 위치시킴으로써 수학 학습 과정에서의 학습자-다이어그램 사이의 다차원적인 상호 관계성을 드러내는 Figure 10과 같은 모델을 제시한다.

이와 같은 모델은 기존의 연구들이 다이어그램과 학습자 사이의 관계성을 다루어 온 방식에 관하여 메타적으로 살펴볼 수 있는 렌즈를 제공한다. 관련 연구들은 모델에 제시된 세 차원의 관계성 중 어느 한 차원만을 고려해 온 것은 아니지만 이들 사이에 서로 다른 정도의 우선순위를 부여하여 비대칭적으로 고려해 왔다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, 앞서 구조-기반 관점 하에서 논의했던 Duval (1995)의 경우 다이어그램의 구조를 물질적으로 변형하는 서로 다른 전략의 유형을 구분하는 등 물질적인 움직임의 차원의 요인에도 주목한 바 있지만, 이러한 전략들은 “조작적 이해

Figure 10 A multidimensional model of learner–diagram interrelationship in mathematics learning⁶⁾

6) 이 모델은 수학 학습 과정에서 학생과 다이어그램 사이에서 일어날 수 있는 상호작용 부분에 특정적으로 초점을 맞춰 모델화한 것으로서, 일반적인 수학 교수-학습 현상에 포함된 모든 요소들 사이의 관계에 대한 포괄적인 모델을 제시한 것은 아니다. 예컨대, Rezat & Strässer (2012)가 일반적인 교수학적인 상황에 대한 모델로서 제안한 교사, 학생, 수학, 인공물 등의 네 요소를 꼭짓점으로 포함하는 사면체 모델과 관련지어 고려해본다면, 본 연구의 모델은 학생과 인공물(다이어그램) 사이의 상호작용과 이를 촉진시키는 교사의 역할까지 일부 포함하는 사면체의 한 면(학생, 인공물, 교사가 꼭짓점에 놓인 삼각형)에 대응한다고 볼 수 있으며 그 중에서도 특히 학생과 인공물을 잇는 모서리 부분에 주로 초점을 맞추고 있다고 볼 수 있다. 물론 세 요소 모두 사면체의 나머지 한 꼭짓점에 해당하는 ‘수학’과도 밀접한 연관성을 맺고 있으며 이러한 관련성은 모델 내의 각 요소와 관련된 요인들의 서술에 명시적, 암묵적으로 포함되어 있다.

(operative apprehension)” (p. 147)라고 하는 특정한 이해 방식과 결합했을 때에만 적절하게 작동할 수 있는 것으로 설명했다는 점에서 이는 인지적인 이해의 차원의 요인을 보다 우위에 있는 것으로 고려한 것이라 볼 수 있다. 반면에, Duval의 이론을 바탕으로 다이어그램과의 상호작용의 유형을 구분하여 제시한 Herbst (2004)의 경우, 조작적 이해의 개념을 재해석하여 학생들의 새로운 추측 생성을 지원하는 “생성적인 방식의 상호작용” (p. 134)의 개념을 제안하였는데, 이러한 상호작용에서는 참조하는 수학적 대상과 다이어그램 사이의 초기 연관성이 분리될 필요가 있다는 점을 강조하였다(Figure 11). 그의 설명은 일정 부분 구조-기반 관점 하에서 기호 체계에 따른 참조적인 관계성을 전제하면서도 그로부터 벗어난 물질적인 다이어그램 자체와 학습자 사이의 상호작용의 필요성에도 주목한다는 점에서 물질-기반 관점의 입장과 부분적으로 공명하고 있는 것으로 볼 수 있다(Noh et al., 2021).

한편, 맥락-기반 관점에서의 연구들은 앞서 살펴본 바와 같이 다이어그램, 제스처, 언어 등의 다양한 양식의 기호적 자원들의 실천적인 사용 방식을 동시에 고려하는데, 이러한 지점에서도 서로 다른 차원의 요인에 대한 비대칭적인 고려의 문제를 살펴볼 수 있다. de Freitas & Sinclair (2014)에 따르면 수학 교수 학습의 사회-문화적인 측면에 주목해온 대부분의 연구들은 의미론적인 의사소통 모델에 따른 분석 방식을 채택하여 발화(speech)의 리듬, 억양과 같은 물질성이나 그와 결합되어 동원되는 물질적인 기호들은 의미를 운반하는 종속적인 요인으로서만 고려하는 경향이 있다. 이전 장에서 살펴본 연구들을 포함하여 많은 맥락-기반 관점의 연구들은 교사-학생 또는 학생들 사이의 논의 과정의 일부를 발췌한 대화문에 대한 분석을 포함하고 있는데, 이 때 다이어그램이나 제스처와 같은 물질적인 차원에서의 움직임들은 주로 발화와 발화 사이의 ‘괄호’ 안에 위치되어 의미작용의 체제에 종속된 부수적인 요소처럼 다루어진다. 이러한 경향은 물질적인 차원에서의 움직임과 변화를 그것을 둘러싼 다른 맥락적인 차원의 요인, 특히 언어-담론적인 요소에 종속된 하위적인 요인과 같이 고려한 것이라 볼 수 있다. 이에 반하여 de Freitas & Sinclair (2014)는 ‘음, 뭐랄까...’와 같은 비의미적인 발화를 포함하여 다이어그램이나 제스처와 같은 물질적인 요소들의 잠재적인 힘의 영향을 보다 적극적으로 고려하여 수업 일화에 대해 접근하는 대안적인 방식을 제안하였다. 예컨대 아래의 발췌문과 같이 물질적인 차원의 요인을 우선적으로 고려하는 방식으로 수업 장면을 기록하고 분석해볼 수 있다. 여기서 의미론적으로 해석 가능한 학생의 발화들은 괄호 안에 위치되어 물질적인 차원에서의 변화들을 연결시키는 접합 지점처럼 고려된다.

Figure 11 Generative mode of interaction (O: object; D: diagram; A: actor) (Herbst, 2004, p. 134)

화면의 다이어그램 가장자리에 손 그림자가 나타난다. [음, 알겠다]
 포인터가 오른쪽 가장자리를 따라 아래로 움직인다. [이 변에 10개가 있어]
 콜린의 머리가 다이어그램 쪽으로 기울여졌고, 손과 포인터는 그대로 있다. [그리고 나는]
 오른쪽 가장자리를 따라 포인터의 움직임이 빨라진다. [10개여]
 콜린의 손은 가장자리를 따라 움직이다가 모서리를 넘어가는 제스처를 한다.
 콜린의 손 그 자가 다이어그램을 가로질러 움직이고, 포인터는 왼쪽 모서리 아래쪽을 두드린다.
 [그 다음에 이것]

(de Freitas & Sinclair, 2014, p. 115)

덧붙여 본고에서 제시한 모델은 학생과 다이어그램 사이의 다차원적인 관계성과 관련하여 교사와 같은 전문가가 수행하는 역할에 대한 통찰 역시 제공한다. 즉, 교사는 수학 교수-학습을 설계하고 실행하는 과정에서 인지적인 차원, 실천적인 차원, 그리고 물질적인 차원의 관계성과 관련하여 각각 학생들이 다이어그램의 구조적인 관계성과 조작 규칙을 파악하기 위해 필요한 수학적 지식의 전달, 적절한 사회-문화적인 실천에 참여할 수 있도록 돕는 인공물을 비롯한 기호적 자원의 활용, 그리고 미시적인 수준에서 기존의 습관으로부터 벗어나 새로운 감각을 경험할 수 있도록 촉발시키는 물질적인 환경의 조성 등의 역할을 수행할 수 있다.

이상에서 논의한 바와 같이 서로 다른 관점에 바탕을 둔 연구들을 병렬적으로 고려하는 메타적인 고찰은 본질적으로 다면적인 수학 학습 현상의 복잡성에 관한 다차원적인 이해와 접근을 추구하기 위한 기반을 제공한다(Scheiner, 2020). 본고에서 제시한 틀이 수학 학습에서의 다이어그램의 역할에 관해 탐구하는 앞으로의 연구에 있어서 현상의 다양한 측면들 중 어떠한 지점에 대한 이해에 기여하고 있는지를 비추는 렌즈로서 역할할 수 있기를 기대한다. 또한 기존의 선행연구들이 덜 주목해왔거나 본고에서 제한적으로만 다룬 새로운 차원이나 요인들을 밝혀냄으로써 이러한 틀을 보완하고 확장하는 작업 역시 필요할 것이다.

CONFLICTS OF INTEREST

No potential conflict of interest relevant to this article was reported.

REFERENCES

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9 (Extraordinario 1), 267-299.
- Arzarello, F., Bosch, M., Lenfant, A., & Prediger, S. (2007). Different theoretical perspectives in research from teaching problems to research problems. In D. Pitta-Pantazi & G. Phillipou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)* (pp. 1618-1627).
- Bakker, A., & Hoffmann, M. H. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 333-358.

- Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education—How can we deal with it?. *ZDM - Mathematics Education*, 38(1), 52-57.
- Bussi, M. G. B., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM - Mathematics Education*, 47(3), 391-405.
- Bussi, M. G. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English & D. Kirshner. (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). New York: Routledge.
- Châtelet, G. (2000). *Figuring Space: Philosophy, Mathematics, and Physics* (R. Shore & M. Zagha, Trans.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chen, C. L., & Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 285-307.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- de Freitas, E., Ferrara, F., & Ferrari, G. (2019). The coordinated movements of collaborative mathematical tasks: The role of affect in transindividual sympathy. *ZDM - Mathematics Education*, 51(2), 305-318.
- de Freitas, E., & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: Theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 133-152.
- de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge University Press.
- 이경화, 김동원, 박진형, 문성재, 노정원, 서민주 공역(2020). 수학·신체·테크놀로지의 삼중주: 포괄적 유물론과 수학교육의 만남. 서울: 경문사.
- Deleuze, G. (1994). *Difference and repetition* (P. Patton, Trans.). New York: Columbia University Press.
- Deleuze, G. (2000). *Proust and signs* (R. Howard, Trans.). London: Athlone Press.
- Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (pp. 77-89). National Council of Teachers of Mathematics.
- Dörfler, W. (2001). Diagrams as means and objects of mathematical reasoning. In G. Torner, R. Bruder, A. Peter-Koop, N. Neill, H. Weigand, & B. Wollring (Eds.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries. Selected papers from the annual conference on didactics of mathematics* (pp. 39-49).
- Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking. In M. Hoffman, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign* (pp. 57-66). New York, NY: Springer.
- Dörfler, W. (2016). Signs and their use: Peirce and Wittgenstein. In A. Bikner-Ahsbahs, A. Vohns, R. Bruder, O. Schmitt, & W. Dörfler (Eds.), *Theories in and of mathematics education* (pp. 21-31). Springer, Cham.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 1, pp. 33-48).
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Cham: Springer.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
- Ferrara, F., & Ferrari, G. (2017). Agency and assemblage in pattern generalisation: A materialist approach to learning. *Educational Studies in Mathematics*, 94(1), 21-36.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Gim, C. C., & Bae, J. H. (2011). A Study on the Meaning of Learning in Gilles Deleuze's Philosophy. *The Journal of Elementary*

- Education*, 24(1), 131-153.
- 김재춘, 배지현(2011). 들뢰즈 철학에서의 “배움”의 의미 탐색. *초등교육연구*, 24(1), 131-153.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Harper, D. (2001). *Diagram*. Online etymology dictionary. <https://www.etymonline.com/word/diagram>
- Herbst, P. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *ZDM - Mathematics Education*, 36(5), 129-139.
- Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 275-291.
- Johnson, D. C. (1980). Types of research. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 20-28). National Council of Teachers of Mathematics.
- Latour, B. (2005). *Reassembling the social: An introduction to actor-network-theory*. New York: Oxford University Press.
- Lee, K. H., Noh, J. W., & Moon, S. J. (2020). Supporting students' argumentation structure construction using indeterminacy of diagram. *Journal of Educational Research in Mathematics, 2020 Special Issue*, 199-211.
- Machado, A., & Silva, F. J. (2007). Toward a richer view of the scientific method: The role of conceptual analysis. *American Psychologist*, 62(7), 671-681.
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2014). Early construction of number as position with young children: a teaching experiment. *ZDM - Mathematics Education*, 46(1), 29-44.
- Menz, P. M. (2015). *Unfolding of diagramming and gesturing between mathematics graduate student and supervisor during research meetings*. Unpublished doctoral dissertation, Simon Fraser University.
- Moon, S. J., & Lee, K. H. (2020). Deleuzian actualizations of the multiplicative concept: a study of perceptual flow and the transformation of learning assemblages. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 221-237.
- Mulligan, J., Oslington, G., & English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM - Mathematics Education*, 52(4), 663-676.
- Noh, J. W., & Lee, K. H. (2016). Deleuze's epistemology and mathematics learning. *School Mathematics*, 18(3), 733-747.
- 노정원, 이경화(2016). 들뢰즈의 인식론과 수학 학습. *학교수학*, 18(3), 733-747.
- Noh, J. W., Lee, K. H., & Moon, S. J. (2019). A case study on the learning of the properties of quadrilaterals through semiotic mediation - Focusing on reasoning about the relationships between the properties. *School Mathematics*, 21(1), 197-214.
- 노정원, 이경화, 문성재(2019). 기호적 중재를 통한 사각형의 성질 학습 사례 연구: 성질 사이의 관계에 관한 추론을 중심으로. *학교수학*, 21(1), 197-214.
- Noh, J. W., Lee, K. H., & Moon, S. J. (2021). A case study on learning proofs of the pythagorean theorem through diagramming: Based on the Châteletian perspective. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 31(2), 131-152.
- 노정원, 이경화, 문성재(2021). 다이어그램을 통한 피타고라스 정리 증명 학습 사례 연구: Châteletian 관점을 중심으로. *수학교육학연구*, 31(2), 131-152.
- Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense?. *Synthese*, 134(1/2), 181-216.
- Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 11-38.
- Papineau, D. (2013). The poverty of conceptual analysis. In M. Haug (Ed.), *Philosophical methodology: the armchair or the laboratory?* (pp. 176-204). Routledge.
- Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. In C. Hartshorne & P. Weiss (vols. I-VI), A. W. Burks (vols. VII-VIII) (Eds.), Harvard University Press (Abbreviated as CP).
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. New York: Humanities Press.

- Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM - Mathematics Education*, 40(2), 165-178.
- Presmeg, N. (2006). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 1, pp. 19-34).
- Presmeg, N. (2008). Trigonometric connections through a semiotic lens. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 103-119). Rotterdam: Sense.
- Racine, T. P. (2015). Conceptual analysis. In J. Martin, J. Sugarman, & K. L. Slaney (Eds.), *The Wiley handbook of theoretical and philosophical psychology: Methods, approaches, and new directions for social sciences* (pp. 39-52). Wiley Blackwell.
- Radford, L. (2009). "No! He starts walking backwards!": Interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - Mathematics Education*, 41(4), 467-480.
- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7.
- Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 547-567.
- Rezat, S., & Straßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM - Mathematics Education*, 44(5), 641-651.
- Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Guest editorial Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 1-10.
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. Unpublished doctoral dissertation, University of Palermo.
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 285-311.
- Scheiner, T. (2020). Dealing with opposing theoretical perspectives: knowledge in structures or knowledge in pieces?. *Educational Studies in Mathematics*, 104(1), 127-145.
- Sinclair, N., & Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM - Mathematics Education*, 47(3), 319-329.
- Sinclair, N., Chorney, S., Güneş, C., & Bakos, S. (2020). Disruptions in meanings: teachers' experiences of multiplication in TouchTimes. *ZDM - Mathematics Education*, 52, 1471-1482.
- Sinclair, N., de Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM - Mathematics Education*, 45(2), 239-252.
- Steenpaß, A., & Steinbring, H. (2014). Young students' subjective interpretations of mathematical diagrams: elements of the theoretical construct "frame-based interpreting competence". *ZDM - Mathematics Education*, 46(1), 3-14.
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303-317.
- Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353-387.
- Thom, J. S., & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): Observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM - Mathematics Education*, 47(3), 465-481.
- van Hiele, P. M. (1985). The child's thought and geometry. In D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn: Brooklyn College, School of Education.
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. MIT press.
- Yoon, C. (2006). *A conceptual analysis of the models and modeling characterization of model-eliciting activities as "thought-revealing activities"*. Unpublished doctoral dissertation, Indiana University.