Original Article

예비교사들의 무한소, 무한히 큰 수, 극한에 대한 담론 분석

백승주¹, 이지현^{2†}

¹세종과학고등학교 교사, ²인천대학교 교수

A Study on Pre-service Teachers' Discourse about Infinitesimals, Infinite Numbers, and Limits

Seungju Baek¹, Jihyun Lee^{2†}

¹Teacher, Sejong Science High School, ²Professor, Incheon National University, South Korea

Abstract

본 연구는 해석학을 이미 학습한 예비교사 7명을 대상으로 무한소와 무한히 큰 수에 대한 인식 및 극한의 설명 방식을 조사하였다. 일부 예비교사들은 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다고 생각하였으며, 무한소가 존재한다고 생각하지 않은 예비교사들도 무한히 작은 양에 의존하여 극한을 설명하였다. 일부 예비교사들은 양화사가 사용된 문장을 정확하게 이해하지 못하였고, 해석학의 아르키메데스 정리를 이용하여 양화사가 포함된 진술을 해석하는데 성공하지 못하였다. 인터뷰 과정에서 일부 예비교사들이 아직 직관적인 수준에 머물러 있었으며 공리와 정리를 바탕으로 수학적 진술을 판단하는 메타규칙을 수용하지 못하고 있음을 관찰할 수 있었다. 이들의 담론은 해석학의 담론과 수학적 대상의 존재 및 승인된 내러티브, 메타규칙에서 차이가 있었으며, 이러한 측면에서 예비교사들의 담론은 해석학의 담론과 공약불가능하였다. 본 연구는 예비교사들이 표준 해석학의 학습에도 불구하고 무한소 관점에 계속 의존하는 현상을 담론의 공약불가능성을 중심으로 구체적으로 분석하고 있으며, 이는 해석학 분야의 교사교육을 위한 기초자료가 될 수 있다.

핵심어: 무한소, 극한, 비표준해석학, 양화사, 담론, 공약불가능성

This study investigated seven pre-service teachers' (who studied analysis) conceptions about infinitesimals, infinite numbers, and explanation methods of limits. Some pre-service teachers thought that infinitesimals and infinite numbers existed. The pre-service teachers who believed that infinitesimals existed explained limits by relying on infinitely small quantities, as did those who believed that infinitesimals did not exist. Some pre-service teachers did not understand the sentences in which quantifiers were used, and they failed to identify statements that contained quantifiers using the Archimedean property of analysis. During interviews, some pre-service teachers demonstrated an intuitive level and did not accept the meta-rules of judging mathematical statements based on axioms and theorems. Their discourse differed from that of analysis in the existence of mathematical objects, endorsed narratives, and meta-rules. This study analyzes the phenomenon of pre-service teachers applying infinitesimals despite having studied standard analysis, focusing on the incommensurability between discourses. This finding can inform teacher education about the curriculum and instruction of analysis.

Keywords: infinitesimal, limit, nonstandard analysis, quantifier, discourse, incommensurability

Received: October 2, 2021 **Revised:** October 31, 2021 **Accepted:** November 1, 2021

†Correspondence: Jihyun Lee, jihyunlee@inu.ac.kr

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1429-7744>

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>), which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
Copyright © The Korea Society of Educational Studies in Mathematics

I. 서론

고등학교에서는 함수의 극한을 ' $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 가 아니면서 a 에 한없이 가까워질 때' $f(x)$ 가 한없이 가까워지는 값 L 로 정의하고 이를 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 로 표현한다(Kwon et al., 2017, p. 13). 그러나 '한없이 가까워진다'는 표현은 얼마나 가까워지는지 또 어떻게 가까워지는지 관찰할 수 없는 영역의 움직임을 포함한다. Whitehead (1948)는 이와 같은 ' a 를 지향하는 h '와 같은 표현이 '무한소 개념'의 한 원인으로 보았다.

수학교육 연구들은 미적분과 관련하여 학생들이 무한소 직관을 갖는 현상에 대해 주목해왔다. 일부 학생들은 dy , dx 를 무한히 작은 양으로 생각하였고(Orton, 1983; Tall, 1980), 어떤 학생들은 순간속도를 무한히 작은 양을 이용하여 이해하고 있었다(Job & Schneider, 2014). 그리고 정적분과 관련해서도 일부 학생들이 영역의 넓이를 '폭이 무한히 작은 직사각형의 넓이들의 합 또는 무한히 많은 선분들의 넓이들의 합'과 같이 무한소 관점으로 이해한다는 것이 보고되었다(Czarnocha et al., 2001; Jung & Kang, 2008; Shin, 2009). Ely (2007)는 학생들의 무한소 관점이 미적분학의 태동기에 무한소를 이용하였던 Leibniz의 관점, 혹은 1960년대 Robinson에 의해 정립된 비표준해석학과 유사함을 제시하기도 하면서 학생들의 무한소 관점을 오개념보다는 비표준 개념으로 볼 것을 제안하였다.

이와 같이 중고등학생뿐만 아니라 대학생들의 무한소 관점을 보고한 여러 연구에도 불구하고, (예비)교사들의 무한소 관점을 탐색한 연구는 부족한 형편이다. 교사들은 학생들의 사고를 이해하고, 교육과정의 내용과 학생들의 사고를 연결하는 수업계획을 세우고 적용한다. 그러나 만약 교사 자신이 무한소 관점을 갖고 있다면, 교사는 표준 해석학적 관점에서 전개되는 학교 수학과 학생들의 무한소 직관 사이의 괴리를 정확히 이해하고 대응하는 데 어려움을 겪을 수밖에 없다. 뿐만 아니라 예비교사들은 무한소의 존재를 인정하지 않는 표준 해석학을 대학에서 공부하는데, 예비교사들의 무한소 관점은 표준 해석학¹⁾의 학습에 인식론적 장애요인으로 작용할 수 있다. 따라서 예비 교사들의 무한소 관점과 이들이 표준 해석학의 학습에도 불구하고 무한소 관점에 계속 의존하는 현상을 구체적으로 파악하고 그 원인은 무엇인지 탐색하는 것은 해석학 분야의 교과 지식 함양에 중요한 문제이다.

한편 선행연구들은 학습자의 수학학습에서 새로운 용어나 정리가 추가되는 대상수준의 발달 이외에도 메타수준의 발달이 발생한다는 것에 주목해왔다(Cooper & Lavie, 2021; Park & Lee, 2014; Sfard, 2007; Sfard, 2008). 대상수준의 학습은 이전 담론의 확장이지만 메타수준의 학습은 이전에 학습자가 따랐던 규칙을 벗어나 새로운 담론, 특히 공약불가능한 담론으로 전환하는 것으로 학습자에게 쉽지 않은 과제이다. 그럼에도 불구하고 메타수준의 학습은 음수나 무한집합 등의 학습에서도 이루어져야 하는 수학학습에서 피할 수 없는 과정이기에 연구자들은 공약불가능한 담론들 사이에서 발생하는 학습자의 갈등 및 메타수준의 학습을 돕기 위한 방안들을 연구해왔다(Chang, 2020; Cooper & Lavie, 2021; Oh et al., 2014; Park & Lee, 2014; Seo & Lee, 2020; Sfard, 2007; Sfard, 2008). 그러나 메타수준 학습의 촉진 방안에 앞서 학습자들이 수학학습에서 만나게 되는 공약불가능한 담론들의 존재를 식별하고 학습자의 담론과의 관계를 파악하는 것 또한 중요하게 다루어져야 할 것이다.

Bueno (2007)는 무한소가 배제된 해석학과 무한소를 수학적 대상으로 받아들이는 비표준해석학의 관계를 수학에서 공약불가능성의 사례로 논의한 바 있다. 이에 본 연구는 예비교사들의 무한소와 무한히 큰 수에 대한 인식을 확인하고, 예비교사들의 담론과 해석학의 담론을 비교하고자 한다. 또한, 해석학을 학습한 예비교사들이 해석학의 담론으

1) 표준해석학이라는 용어는 비표준해석학과 대비되어 사용되는 용어로서 사실 표준해석학보다는 일반적으로 '해석학'이라고 불린다. 이하에서는 표준해석학을 가리키는 용어로 표준해석학 대신 '해석학'을 사용한다.

로의 이행 과정에서 겪는 어려움을 파악하고자 한다. 따라서 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 예비교사들은 무한소와 무한히 큰 수를 어떻게 인식하는가? 또 극한의 설명에 무한소를 어떻게 활용하는가?

둘째, 예비교사들의 담론과 해석학의 담론은 공약불가능하다고 할 수 있는가?

셋째, 예비교사들이 해석학 담론으로의 이행에서 겪는 어려움은 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 담론으로서의 수학과 담론 사이의 공약불가능성

Sfard (2007, 2008)는 사고와 의사소통이 분리된 활동이 아니며 사고가 일종의 의사소통이라는 관점에서 의사소통(communication)과 인지(cognition)를 결합한 commognition이라는 용어를 사용하였다. Sfard (2007, 2008)는 의사소통을 게임으로 생각했던 Wittgenstein의 관점을 받아들이고 서로 다른 규칙에 의해 지배되는 다양한 commognition이 있음을 제안하였다. 사람들은 다양한 유형의 의사소통에 참여하거나 배제될 수 있으며 이런 형태의 의사소통을 담론이라 한다. 각 개인은 그들이 속한 의사소통 그룹 즉 담론 커뮤니티에서 의사소통 활동에 참여하게 된다. 그리고 학생들은 수학교실에서 의사소통에 참여하면서 수학 담론 커뮤니티의 구성원이 된다. 이 입장에서 수학학습은 학습자가 담론을 개별화하는 과정 즉, 다른 사람 및 본인 스스로와 수학적으로 의사소통하게 되는 과정으로 여겨진다. 따라서 수학교실에 들어오는 학생들은 수학학습을 하면서 본인의 수학적 담론을 수정하고 변형하며 담론적 능력을 향상시킨다(Sfard, 2007).

수학 담론의 성격을 규정짓는 대표적인 요소에는 단어, 시각적 증재자, 내러티브, 루틴이 있다. 첫 번째 담론의 요소는 단어이다. 학생들은 수학적 담론에 참여하면서 새로운 수학 용어를 배우고 체계적으로 사용하는 방법을 학습하게 되는데, 이러한 어휘들은 학습자가 수학과 세상을 바라보는 방식에 영향을 주게 된다. 두 번째 담론의 요소는 시각적 증재자로서 그래프나 도형과 같은 그림뿐 아니라 수식과 표와 같은 수학적 도구들을 모두 포함한다. 학생들은 시각적 증재자를 통해 대상들을 식별할 수 있고, 의사소통을 위한 효과적인 도구로 사용할 수 있다. 세 번째 요소는 내러티브로 글이나 말 또는 수학 식들로 표현되는 수학적 대상이나 대상들의 관계에 대한 진술과 같은 텍스트를 의미하는데, 이들은 승인되거나 거부될 수 있다. 마지막 담론의 요소는 루틴으로서 표현 그대로 담론에서 반복되어 행해지는 패턴을 말한다(Sfard, 2007).

담론의 변화로서의 수학학습은 크게 대상수준과 메타수준의 두 가지 형태가 있다. 대상수준의 학습은 담론을 특징짓는 각 요소들의 변화로서 '어휘 확장, 새로운 루틴의 구성, 새롭게 지지된 내러티브의 생산'과 같은 기존 담론의 확장을 의미한다(Sfard, 2007, p. 573). 예를 들어 ' $2+3=5$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, 삼각형의 내각의 합은 180° 이다'와 같은 수학적 진술을 추가하는 것은 대상수준의 학습이다(Sfard, 2007, p. 572). 반면 메타수준의 학습은 서로 다른 메타 규칙에 의해 지배되는 담론 즉, 공약불가능한 담론으로의 전환을 의미한다(Sfard, 2007).

담론간의 공약불가능성 현상은 철학적으로 오랫동안 논의되어 왔다. Fleck은 자연과학에서 이론의 변화와 사고 방식(thought-style)의 변화에 따른 개념 변화에 대해 설명하면서 공약불가능성을 언급하였고(Oberheim, 2005), Kuhn (1962)은 과학의 발달의 혁명적인 관점을 제시하면서 서로 다른 패러다임을 가진 과학자들 사이에 공약불가능성 현상이 존재함을 제시하였다. 또한 철학자 Rorty (1979)는 Kuhn의 정상과학을 담론으로 일반화 하면서 공약불가능성을 담론의 진술들이 현재는 갈등하는 상태에 있는 것처럼 보이지만, 그 갈등요소가 해결 가능하고 합리적인 합의를

할 수 있는 상태로 정의하면서 공약불가능성을 공약가능성의 반대 경우로 제시하였다. Sfard (2008, p. 257)는 이러한 Rorty의 공약불가능성의 정의를 수용하여 담론들이 '주어진 내러티브의 승인여부를 결정하는 규칙을 공유하지 않을 때' 공약불가능하다고 하였다. 즉, Sfard의 공약불가능성의 정의에 의하면 내러티브를 승인하는 메타규칙이 다른 경우 담론들은 서로 공약불가능하다.

Sfard는 담론의 공약불가능성 현상이 그 동안 수학교육에서 중요하게 다루어지지는 않았지만 분명히 존재하며, 계통발생적 관점과 개체발생적 관점 모두에서 수학적 사고를 이해하는데 도움이 됨을 주장하였다. 때때로 수학교실에서 학생과 교사는 모두 표면적으로는 타당한 추론에 의한 진술을 하는데, 이들이 모순을 일으키는 경우가 있다. 예를 들어, 자연수의 담론에서 사고하는 아동들은 '임의의 두 수 a, b 에 대해 $a < b$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이다'의 명제를 참이라고 생각하지만, 확장된 수체계인 정수, 또는 실수체계에서 사고하는 교사들은 이 명제가 거짓이라고 판단한다. 한 명제에 대해 참과 거짓의 반대의 주장을 하지만, 이들의 주장은 각각의 담론 안에서 모두 성립한다. 이는 'A이다'와 'A가 아니다'의 두 가지 주장 중 하나만 참일 수 있다는 아리스토텔레스의 '비모순의 원칙'은 한 담론 내에서는 성립하지만, 담론을 가로지르면서 사고할 때는 성립하지 않기 때문이다. 따라서 'A이다'와 'A가 아니다'의 모순되어 보이는 이 두 명제는 서로 다른 두 담론에서 모두 참일 수 있다. 그리고 이렇게 모순된 명제가 각 담론에서 참일 수 있는 이유는 담론들이 서로 다른 메타규칙의 영향하에 있기 때문이다(Sfard, 2021).

메타규칙은 이와 같이 내러티브의 승인여부에 영향을 미친다. 뿐만 아니라 메타규칙은 단어의 사용 및 루틴과도 밀접한 관련을 갖고 있기 때문에 공약불가능한 담론으로의 전환은 단지 메타규칙의 변화에만 한정하기는 어려우며 담론의 많은 부분에서 변화가 발생한다. 예를 들어 공약불가능한 담론들에서는 동일한 과제를 서로 다른 방식으로 수행하거나 친숙한 용어를 다른 방식으로 사용하기도 한다(Sfard, 2008). 수학교육에서 이의 대표적인 사례는 수체계의 확장에서 나타난다. 한 예로, 자연수 담론에서 정수 담론으로 이동될 때 내러티브의 승인 여부가 구체적인 모델 및 경험적 증거에 의한 판단에서 공리에 의한 판단으로 바뀐다. 그리고 이때 수는 어떤 물리적 대상들의 모임을 지칭하는 것에서 형식적인 대상을 의미하는 것으로 바뀌며 참이었던 명제가 거짓이 되기도 한다(Sfard, 2007). 공약불가능한 담론들의 대표적인 사례와 그 현상은 아래 Table 1과 같다.

담론의 메타규칙의 점진적인 변화는 학교 수학의 목표이기도 하다(Sfard, 2008, p. 202). 따라서 공약불가능한 담론으로의 전환은 학습자가 담론을 확장하고 변경하는 과정에서 때때로 겪어야 하는 관문이다. 그러나 담론들이 상이한 메타규칙의 영향 하에 있으면서도 메타규칙이 학습과정에서 명시적으로 드러나지 않고 암묵적으로 존재하는 경

Table 1 Examples and properties of incommensurable discourses (Sfard, 2021)

	사례(1): D1-자연수, D2-정수	사례(2): D1-유한 집합, D2-무한 집합
담론들은 입증 루틴에서 다르다 (메타규칙의 차이)	D1: 경험적 증거에 기반하여 승인 D2: 공리와 일관성을 보임으로써 승인	D1: 경험적 증거에 기반하여 승인 D2: 공리와 일관성을 보임으로써 승인
공통된 용어가 D1과 D2에서 서로 다르게 사용된다	D2에서는 D1과 달리, 수학적 대상인 수 중에 존재하는 물리적 대상들의 집합을 지시하는 것으로 해석될 수 없 는 것이 존재한다	D2에서는 D1과 달리 수학적 대상인 수 또는 집합들 중 에, 동시에 존재하는 물리적 대상의 모임으로서 해석될 없는 것이 존재한다
오직 한 담론에서만 발견될 수 있는 대상이 존재한다	D2는 D1에서는 존재하지 않았던 음수를 포함한다	D2는 무한집합을 포함하지만, D1은 무한집합을 포함하 지 않는다
담론들 사이에 명백하게 모순된 내러티브들이 존재한다	'임의의 두 수 a, b 에 대해서 만약 $a < b$ 이면 $1/a > 1/b$ 이다' 의 내러티브가 D1에서는 참이지만 D2에서는 참이 아 니다	D2에서는 부분이 전체보다 작다는 것이 더 이상 참이 아 니다

우가 많기에 쉬운 일은 아니다. 또한 학습자들은 메타규칙이 다른 공약불가능한 담론을 만나서 코모그니티브 갈등을 겪기도 하는데, 이 갈등은 메타수준의 학습 촉발을 위한 중요한 요소이지만 이를 파악하는 것 역시 쉽지 않다(Sfard, 2007). 그러므로 수학교실에서 학습자가 만날 수 있는 공약불가능한 담론의 존재 및 코모그니티브 갈등 요소를 찾고 그 양상을 분석하는 것은 학습자의 메타수준으로의 도약을 위한 중요한 사항이다.

2. 무한소 담론과 해석학의 담론

Bueno (2007)²⁾는 수학에 공약불가능성의 사례가 존재함을 제안하였다. 그는 공약불가능한 수학적 이론들은 하나의 수학적 대상에 대해 급진적으로 다른 관점을 갖거나 주어진 문제에 대해 서로 다른 답을 제시할 수도 있으며, 그러한 관점들 중 어느 것이 옳은지 판단할 기준이 존재하지 않음을 논의하였다. Bueno (2007)는 이러한 공약불가능성의 대표적 사례로 비표준해석학과 해석학의 존재를 들었다. 실제로 19세기에 아직 비표준해석학이 정립되지는 않았지만, Cauchy가 해석학에서는 성립하지 않는 명제 ‘수렴하는 연속함수의 급수의 합은 연속이다’를 참으로 생각한 것은 무한소의 존재를 바탕으로 사고했기 때문이었다(Bueno, 2007, p. 99). 본 연구는 이러한 비표준해석학과 해석학 이론 사이의 공약불가능성이 수학교육에서 학생들과 예비교사들의 수학적 개념을 해석하는데 효과적일 수 있다고 제안한다.

표준해석학과 해석학은 무한소와 무한히 큰 수의 존재성에 대한 입장이 다르며 따라서 가정하고 있는 수 체계가 다르다. 해석학의 실수집합 $\mathbb{R}$ 은 체의 공리와 순서 공리 그리고 완비성 공리를 만족하는 완비순서체로서 공리적으로 정의된다. 그리고 완비성 공리에 의해, 다음과 같은 아르키메데스 정리가 성립한다.

임의의 양수 a 와 임의의 실수 $b \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $na > b$ 를 만족하는 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 이 존재한다.

아르키메데스 정리에 의하여, 실수 집합에는 무한히 큰 수(infinite number)와 무한소가 존재하지 않는다. 그러나 Abraham Robinson이 형식화한 비표준해석학은 아르키메데스 정리가 성립하지 않는 초실수체 $\mathbb{R}^*$ 위에서 전개되며, 초실수체에서는 다음 공리가 성립한다.

$\mathbb{R}^*$ 는 양의 무한소를 가진다. 즉 ε 이 존재하여 임의의 양의 실수 $r \in \mathbb{R}$ 에 대해 $0 < \varepsilon < r$ 가 성립한다(Keisler, 2007, p.1).

비표준해석학의 수체계 $\mathbb{R}^*$ 에는 무한소가 정당한 수학적 대상으로서 존재하고, 무한소의 역수인 $\frac{1}{\varepsilon}$ 즉, 무한히 큰 수 역시 존재한다. 비표준해석학과 해석학은 무한히 큰 수와 무한소의 존재성 이외에 구체적 내러티브에서도 차이가 있다. 가장 대표적인 사례는 $0.999\cdots$ 에 대한 해석이다. 해석학의 관점에서 전개되는 학교수학에서 $0.999\cdots$ 의 기호 $\cdots$ 는 극한을 의미하고 따라서 $0.999\cdots = 1$ 이다. 그러나 비표준해석학에서는 기호 $\cdots$ 에 대해 다양한 해석이 가능하다(Stewart, 2010, p.176). 만약 기호 $\cdots$ 가 의미하는 무한이 해석학과 마찬가지로 극한이라면, $0.999\cdots = 1$ 이 되지만, $\cdots$ 이 무한한 정수(infinite integer)로서 종결되는 무한히 큰 수를 의미한다면 $0.999\cdots$ 는 1보다 작다는 해석이 가능하다. 즉, 비표준해석학에서는 무한한 정수를 H 라 표현하여 $0.999\cdots$ 는 9가 H 의 개수만큼 있다고 생각하여 $0.999\cdots 99$

2) Bueno (2007)이 말하는 공약불가능성은 Sfard (2007, 2008)의 수학학습의 담론 간의 공약불가능성과는 차이가 있지만 유사한 성격을 지닌다. Bueno (2007)는 Kuhn (1962)이 제시한 과학의 역사적 발달에서 패러다임 사이에 존재해왔던 공약불가능성이 수학 이론 사이에 특히 해석학과 비표준해석학 사이에 존재함을 논의하였다.

라 표현할 수 있고 이 경우 $0.999\cdots$ 는 1보다 작다. 즉, 비표준해석학에서는 $\cdots$ 의 해석에 의존하여 $0.999\cdots$ 가 1보다 작게도 해석이 가능하다(Katz & Katz, 2010). 이러한 관점에서, 논의하고 있는 수체계에 대한 명시적 언급이 없는 경우에 $0.999\cdots$ 이 1보다 작을 수 있다는 학생들의 직관은 옹호될 수 있다.

$0.999\cdots$ 은 해석학과 비표준해석학이 하나의 수학적 진술에 대해 상이한 관점을 갖는 가장 대표적인 예이다. 또 다른 예는 해석학의 축소구간 정리에서 찾을 수 있다. 해석학에서는 다음이 성립한다.

만약 $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 이 공집합이 아닌 유계인 닫힌 구간들의 축소구간 열이라 하자(즉 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ 이라 하자). 만약 $n \rightarrow \infty$ 이고, 구간의 길이가 $|I_n| \rightarrow 0$ 이면 $E = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \cdots \cap I_n \cap \cdots$ 는 한 점으로 이루어진 집합이다.

(Wade, 2014, p. 55)

이 진술에 대해 $0.999\cdots$ 의 추론과 동일한 논리를 적용하면 비표준해석학에서는 기호 $\cdots$ 에 대해 다양한 해석이 가능하다. 만약 기호 $\cdots$ 의 무한을 무한한 정수 H 에서 종결되는 것으로 생각한다면 $E = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \cdots \cap I_n \cap \cdots$ 은 한 점으로 이루어진 집합이 아닌, 실수 점 및 그와 무한소 거리에 있는 초실수 점들을 포함하는 집합이 된다.

해석학과 비표준해석학은 극한의 설명방식에서도 차이가 있다. 해석학은 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 의 극한을 ε - δ 를 사용하여 다음과 같이 정의한다.

임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $\delta > 0$ 가 존재하여 $|x - c| < \delta$ 이면 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 이다.

비표준해석학에서도 극한의 이러한 ε - δ 설명은 성립하지만(Keisler, 2007, p. 71), 비표준해석학은 해석학에 존재하지 않는 무한소를 이용하여 극한을 설명한다. 우선 비표준해석학의 극한을 이해하기 위해 다음과 같은 standard part 원리를 알아야 한다.

임의의 유한 초실수 $x \in \mathbb{R}^*$ 는 단 하나의 실수 $r \in \mathbb{R}$ 과 무한히 가깝다. 즉, 임의의 유한한 monad³⁾는 유일한 실수를 포함한다(Keisler, 2007, p. 5).

비표준해석학에서는 standard part 원리에 의해 임의의 실수 a 와 무한소 ε 에 대해 $st(a + \varepsilon) = a$ 가 성립한다. 그리고 c 가 실수일 때 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 는 standard part 원리를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

단계 1 x 를 c 와 같지 않은 c 에 무한히 가까운 수라 하고, $f(x)$ 를 정리하라.

단계 2 standard part $st(f(x))$ 를 계산하라(Keisler, 2012, p. 120).

이처럼 비표준해석학과 해석학은 무한소와 무한히 큰 수의 존재성에 대한 관점이 다르며 이에 따라 수학적 정당화 과정에서 차이가 있다. 극한과 같이 동일한 결과를 갖지만 그 설명 방식이 다를 수 있고, $0.999\cdots$ 과 무한 축소구간열

3) 만약 두 수 $x, y \in \mathbb{R}^*$ 에 대해 $x \sim y$ 가 무한소이면 x, y 는 무한히 가깝다고 하고 $x \approx y$ 라 쓴다. 따라서 x 가 무한소일 경우 $x \approx 0$ 이다(Keisler, 2007, p. 2). 또한 임의의 주어진 초 실수 $x \in \mathbb{R}^*$ 에 대해 x 의 monad를 다음과 같이 정의한다.
 $\text{monad}(x) = \{y \in \mathbb{R}^* \mid x \approx y\}$ (Keisler, 2007, p. 2).

에서와 같이 기호 ‘...’의 의미를 명확히 밝히지 않는 경우에는 다른 결과를 갖는 해석 또한 가능하다.

이와 같이 무한소가 수학적 대상으로 인지되고, 수학적 진술의 이해에 활용되는 사례는 비단 비표준해석학만이 아니다. 16~18세기 수학의 역사에서도 무한소를 활용하여 미적분학을 전개한 사례를 찾아볼 수 있다. 특히 Leibniz는 무한소를 적극 활용한 것으로 유명하다. Leibniz는 무한소를 편리한 계산을 제공하는 ‘유용한 허구’로서 수학적 절차에서 적극 사용하였다. 그러면서 Leibniz는 ‘같음’에 대해서 적어도 하나 이상의 관계가 있다고 생각하면서 ‘무시할 수 있는 항까지 같음’의 개념을 사용하여 미분의 식을 정당화하였다(Bair et al., 2017, pp. 205-207).

그러나 이 시기 무한소 양이 모든 수학자들에게 받아들여진 것은 아니었으며 Leibniz와 같이 유용한 도구로서 무한소를 사용한 수학자도 있었지만, 이러한 추론에 대해 비판하고 논쟁한 수학자들도 존재하였다. 특히 Newton의 유율법에 대해 Berkeley가 ‘죽은 양의 유령’이라 말하며 비판했던 사례는 유명하다. Newton은 x^n 의 유율의 계산에서 x 의 유한한 증분 o 를 도입하여, $(x+o)^n$ 을 이항정리로 전개한 식에서 x^n 을 뺀 식을 o 로 나누었다. 이후 o 에 0을 대입하여 x^n 의 유율 $nx^{(n-1)}$ 을 얻었다. Berkeley는 이러한 Newton의 유율법에서 o 의 양을 0이 아닌 것으로 취급했다가 0으로 생각하여 소거한 것을 비판하였다. 그리고 이후 수학자들은 이에 대한 논쟁을 이어갔다. Lagrange는 무한소의 사용이 엄밀하다고 확신하고 있었고, Robins는 무한소의 사용을 배제하면서 극한에 도달할 수 없다는 입장을 드러내었다. 이에 반해 Jurin은 Principia의 Book I에서 Newton의 표현을 극한에 도달한다는 것으로 해석하였다(Cajori, 1917, pp. 146-149). 이 시기 수학자들은 Newton의 아이디어가 무엇인지 그리고 Newton이 ‘변수가 극한에 도달할 수 있는지를 의미했는지 여부’에 대한 논문을 작성하기도 하였다(Cajori, 1917, p. 149).

이와 같이 수학자들은 Newton의 유율법 또는 극한에 대해 많은 논쟁을 하면서 변수가 극한에 도달하는지, 도달하지 않는지 또 그 값이 무한소인지에 대해서 고민하였다. 그러나 이러한 관심은 19세기 후반 해석학이 산술화된 이후 극한의 ε - δ 정의의 등장으로 인해 의미가 없어졌다. 산술화된 해석학에서 무한소는 존재하지 않으며, ε - δ 의 방법의 극한 개념에서는 x 가 c 에 도달하는지 여부에 대해서도 중요한 의미를 두지 않는다. 즉 극한 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 에서 x 가 c 에, 그리고 $f(x)$ 가 $f(c)$ 에 도달하는지 여부는 고려하지 않는다. 실제로 연속 변수 x 가 c 에 접근하는 방식은 말하기 어렵다. 직선 위의 실수 점들은 매우 조밀하고 어떤 임의의 점 바로 다음 점은 말할 수 없기 때문이다(Courant, Robbins, Stewart, 1996). 따라서 형식화된 ε - δ 방법에서는 도달 가능성은 고려하지 않는다. ‘임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $\delta > 0$ 가 존재해서 $|x-c| < \delta$ 일 때 $|f(x)-L| < \varepsilon$ 인지, 즉 ‘ x 와 c 가 충분히 가깝게 잡으면, $f(x)$ 와 L 을 임의로 가깝게 만들 수 있는지’에 대한 관심으로 옮겨졌다.

3. 양화사가 포함된 문장에 대한 학생들의 이해

선행연구들은 학생들이 무한소를 수학적 추론에 활용한다고 논의한 바 있다(Czarnocha et al., 2001; Job & Schneider, 2014; Jung & Kang, 2008; Orton, 1983; Shin, 2009; Tall, 1980). 무한소를 통한 미적분학의 이해는 16~17세기 미적분학의 발달 시기에 수학자들 사이에서도 나타난 개념이다. 따라서 학생들이 무한소를 이용하여 미적분학을 이해하는 것은 그리 특이할 만한 일은 아니다. 그러나 예비교사들의 경우 해석학을 학습했음에도 불구하고 여전히 무한소 관점을 갖고 있다면 이는 해석학 담론으로 완전히 이행하지 못한 것으로 판단되며 그 현상에 대한 분석이 필요하다. 이에 본 절에서는 양화사가 포함된 문장의 이해와 관련된 선행연구 분석을 통해 학생들의 해석학 학습의 어려움의 실마리를 찾고자 한다.

해석학의 극한, 연속, 미분, 적분 등의 정의와 정리들은 보편양화사 ‘임의의’와 존재양화사 ‘존재한다’를 사용하

여 전개되지만 선행연구들은 학생들이 양화사의 이해에 어려움을 겪는다는 것을 논의해왔다. 학생들은 특히 양화사가 한 개 포함된 문장보다 두 개 이상 포함된 문장을 더 잘 이해하지 못하는 경향이 있다(Dawkins & Roh, 2011; Dawkins & Roh, 2019; Dubinsky & Yiparaki, 2000; Roh, 2010). 예를 들어 양화사가 포함된 다음 두 진술을 보자.

- ① 어떤 수 x 가 존재하여, x 는 모든 자연수 n 보다 크다.
- ② 모든 자연수 n 에 대하여, n 보다 큰 수 x 가 존재한다.

진술 ①은 존재양화사가 보편양화사 보다 앞에 위치한다(EA 진술). 이 진술의 경우 어떤 무한히 큰 수에 해당하는 수 x 의 존재성을 보장하여 그 x 는 임의의 자연수보다 크다고 말하고 있다. 반면 ②는 보편양화사가 존재양화사보다 앞에 오는 진술(AE 진술)로서 ①에서 존재한다고 보장한 무한히 큰 수에 해당하는 수의 존재성을 말할 수 없다. 단지 한 개의 자연수 n 을 택할 때마다 그 수보다 큰 수가 존재한다고 말할 수 있을 뿐이다. 선행연구에 의하면 학생들은 AE의 진술보다 EA의 진술을 더 어려워하는 경향이 있으며, EA의 진술을 AE의 진술로 해석하는 ‘양화사 도치의 오류’를 보이기도 하였다(Dawkins & Roh, 2011; Dubinsky & Yiparaki, 2000; Piatek-Jimenez, 2010).

Dawkins & Roh (2011)는 다음의 문장을 통해 학생들이 양화사가 포함된 문장을 어려워한다는 것을 논의하였다.

- (1) Does there exist a real number x satisfying that for any $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$?, and
- (2) If there does exist an x , is there any other real number x satisfying that for any $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$?

(Dawkins & Roh, 2011, p.823)

일부 학생들은 이 문장의 의미에 대해 파악하지 못하였으며 또 일부 학생들은 (1)의 진술을 ‘임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $|x| < \varepsilon$ 를 만족하는 실수 x 가 존재한다’와 같이 변수 x 와 ε 의 순서가 반전된 것으로 받아들이기도 하였다(Dawkins & Roh, 2011, p.824).

해석학에서 양화사의 사용은 매우 일반적이며 많은 정리들이 양화사를 사용하여 전개된다. 뿐만 아니라 무한소 양의 배제를 함축하는 아르키메데스 정리 역시 보편양화사 ‘임의의’와 존재양화사 ‘존재한다’의 두 가지 양화사를 포함한 진술로 표현된다. 따라서 예비교사들은 아르키메데스 정리를 파악하기 위해 양화사가 포함된 문장의 의미를 이해할 수 있어야 한다. 그러나 만약 예비교사들이 양화사에 대한 이해가 부족하다면 해석학을 학습했음에도 불구하고 아르키메데스 정리의 의미를 파악하기 어려울 수 있으며, 이로부터 유도되는 ‘무한소와 무한히 큰 수가 실수 체계 안에 존재하지 않는다’는 수학적 진술 또한 이해하기 어려울 것이다.

III. 연구 방법

본 연구는 수도권 소재 대학 수학교육과 3학년에 재학 중인 해석학을 공부한 경험이 있는 예비교사 7명을 대상으로 수행하였다. 이 예비교사들은 2020년 2학기에 한 연구자가 진행한 강의를 수강하였고, 수업 과제로 제시된 설문 문항에 대해 자유롭게 답안을 작성하여 온라인으로 제출하였으며, 후속 인터뷰에 참여하였다.

해석학을 학습한 예비교사들이 무한히 큰 수와 무한소의 존재 및 극한에 대해 어떤 인식을 가지고 있는지 탐색하기 위한 설문 문항을 설계하였다. 문항 1-(1)과 1-(2)는 무한히 큰 수와 무한소의 존재성에 대한 예비교사들의 생각을 알

아보기 위한 문제였다. 문항 2는 실수체계의 축소구간 정리 즉, 축소구간들의 무한 교집합 결과에 대한 질문으로 무한소에 대한 예비교사들의 관점을 파악하기 위한 문항이었다. 3번 문항은 Berkeley가 ‘죽은 양의 유령’이라 비판했던 Newton의 유율법과 관련하여 예비교사들의 극한에 대한 설명 방식을 살펴보기 위해 제시하였다. 연구를 위해 설계된 문항은 Table 2에 제시하였다.

연구자들은 1) 문항에 대해 학생들의 답변을 기록하였으며, 2) 문항별로 학생들의 답변을 계속적으로 비교하면서 비슷한 답변끼리 묶어 범주들을 추출하였다. 3) 연구자들은 추출한 범주로 각 문항에 대한 학생들의 답변들을 각각 코딩한 후 비교하였고, 연구자 사이의 코딩에 의견 차이가 있었던 경우 여러 차례 논의를 통해 범주와 코딩을 수정하여 반영하였다. 4) 학생들의 사고에 대한 깊은 이해를 위해 설문 내용을 바탕으로 zoom을 이용한 화상 인터뷰를 실시

Table 2 Task related to infinite number, infinitesimal and limit concept

문항 번호	설문 질문	문항 내용
1-(1)	모든 자연수(1,2,3,...,n,...)보다 더 큰 수가 존재할 수 있을까요? 아니면 존재할 수 없을까요? 여러분이 그렇게 추론한 이유를 설명해 주십시오.	무한히 큰 수의 존재
1-(2)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 보다 작은 양수가 존재할까요? 즉, 아래의 모든 부등식을 만족시키는 수 x 가 존재할까요? 여러분의 생각과 그 이유를 써주시기 바랍니다.	무한소의 존재
2	$0 < x < 1, 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < x < \frac{1}{3}, 0 < x < \frac{1}{4}, \dots, 0 < x < \frac{1}{n}, \dots$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>다음은 구간의 무한 교집합 $[0, 0.1] \cap [0, 0.01] \cap [0, 0.001] \cap \dots \cap [0, (0.1)^n] \cap \dots$ 에 대한 수민이의 생각입니다. 수민: $A_n = [0, (0.1)^n]$ 이라고 하면, $A_1 = [0, 0.1]$ $A_1 \cap A_2 = [0, 0.01]$ $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [0, 0.001]$ $\vdots$ $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = [0, (0.1)^n]$ $\vdots$ 모든 n에 대해 유한 교집합 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$은 항상 구간 $[0, (0.1)^n]$ 형태야. 따라서 무한 교집합 $[0, 0.1] \cap [0, 0.01] \cap [0, 0.001] \cap \dots \cap [0, (0.1)^n] \cap \dots$도 0 이외의 다른 양수를 포함하는 어떤 구간이 되지 않을까?</p> </div>	축소구간열의 결과
	여러분은 수민이의 생각에 대해 어떻게 생각하십니까? 무한 교집합 $[0, 0.1] \cap [0, 0.01] \cap [0, 0.001] \cap \dots \cap [0, (0.1)^n] \cap \dots$ 이 0 이외의 다른 양수를 포함하는 구간이 될 수 있을까요?	
3	다음은 함수 $f(x) = x^2$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수를 구하는 과정입니다.	h 에 대한 생각 및 미분식의 정당화
	$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$ <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> </div>	
	위 계산 과정 중 ①에서는 $h \neq 0$ 로 생각하여 분모와 분자를 각각 h 로 나누었습니다. 그런데 ②의 극한 $\lim_{h \rightarrow 0} (2+h)$ 의 값 2는 $2+h$ 에 $h=0$ 을 대입해 얻은 값처럼 보입니다. h 의 취급과 관련하여 ①, ②의 계산 과정이 어떻게 양립할 수 있는지 여러분의 생각을 적어주십시오.	

시하였다. 화상 인터뷰는 녹화한 후 전사하여 분석하였다.

IV. 결과 분석

1. 설문 응답 분석

문항 1-(1)에서 일부 예비교사들은 ‘임의의 수를 생각해도 그 수보다 더 큰 수가 존재한다’와 유사한 이유를 제시하면서 ‘존재한다’와 ‘존재하지 않는다’는 서로 다른 답변을 제시하였다. 이러한 현상은 1-(2)에서도 유사하게 드러났다.

2번에 대한 답변에서 5명의 예비교사들은 무한교집합의 결과가 {0}이 된다고 하였으며 2명의 예비교사는 무한히 작은 구간이 될 것이라고 답하였다. 연산 결과가 {0}이 된다고 했던 일부 예비교사들의 경우 $\lim_{n \rightarrow 0} (0.1)^n = 0$ 을 근거로 들기도 하였다.

Table 3은 문항 1-(1), 1-(2)와 2번에 대한 예비교사들의 답변 유형을 범주화하여 제시한 것이다.

3번 문항에 대한 답변에서 예비교사들은 미분계수를 구하는 극한 식이 정당화될 수 있는 이유에 대한 다양한 의견을 제시하면서 h 의 움직임 및 역할에 대한 생각을 드러내었다. 다수의 예비교사들은 고등학교 수학 교과서의 설명 방식과 유사하게 h 를 0에 한없이 가까워지는 변수로서 생각하였다. 그러나 일부 예비교사는 미적분학 태동기의 수학자들의 설명방식과 유사하게 무한히 작은 양에 의존하거나(S6, S7), h 가 0에 도달한다는 생각(S3)을 드러내기도 하였다. 그리고 한 예비교사(S1)는 ‘극한식을 먼저 정리한 후 대입해야 한다’는 답변을 제시하다. 이와 같이 3번 문제의 답변에서 예비교사들의 설명은 h 를 무한히 작은 값으로 표현했는지 여부와 h 의 움직임의 관점에서 차이가 나타났으므로 이를 중심으로 범주화 하여 Table 4에 제시하였다. 그러나 예비교사들의 응답 유형 중 h 를 0에 한없이 가까워지는 변수로 보는 학교수학의 설명방식과 유사한 H3은 다른 답변들과 함께 나타나기도 하였다. 예비교사들의 구체적인 답변 양상은 Table 5에 제시하였다.

2. 인터뷰 분석

1) 무한히 큰 수와 무한소의 존재에 대한 S3의 추론 분석

‘모든 자연수보다 더 큰 수가 존재할 수 있는가?’를 묻는 1-(1) 문항과 관련한 인터뷰 과정 중에 예비교사 S1과 S3는 무한히 큰 수가 존재한다고 했으나, 4명의 예비교사 S2, S4, S5, S6은 존재하지 않는다고 답하였고, S7은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다고 하였다⁴⁾. 다음은 1-(1)의 문항에 대해 ‘존재한다’라고 했던 S3의 설명이다.

4) 4명의 예비교사 중 S2는 1-(1)의 설문에서 존재한다고 답변하였지만 인터뷰 과정에서는 무한히 큰 수가 존재하지 않는다고 답하였다. 이는 1-(1)번 문항을 해석하는 과정의 차이 때문이며 이에 대해서는 다음 절에서 논의한다.

Table 3 Coding of the pre-service teachers' responses about infinite number and infinitesimal

문항	답변 유형	답변 예시	답변자 ⁵⁾
1-(1)번 모든 자연수(1,2,3,...,n,...) 보다 더 큰 수가 존재할까요?	존재	<ul style="list-style-type: none"> • 더 큰 수가 있다고 생각합니다. 모든 자연수에서는 덧셈법칙이 성립하므로 자연수에서 가장 큰 수를 a라고 한다면 $a+a=2a$로 더 큰 수가 존재하고 이는 자연수에서 가장 큰 수가 a라는 말이므로 어떤 자연수보다 더 큰 수는 존재할 수 밖에 없다고 생각합니다. • 있다고 생각합니다. $n \Rightarrow n+1 \Rightarrow n+\dots$ 무엇이 되었던 간에 거기에 +1을 한다면 충분히 크다고 생각할 수 있기 때문이다. 	S1, S2, S3, S7
1-(2)번 모든 자연수 n 대해 $\frac{1}{n}$ 보다 작은 양수가 존재할까요?	비존재	존재할 수 없다. k 를 모든 자연수보다 큰 수라고 하면 $[k+1]$ 은 k 보다 큰 자연수다. 따라서 모순이다.	S4, S5, S6, S7
	존재	모든 부등식을 만족하게 되면 0에 가까운 소수가 나오겠지만 0이 되는 것은 아니기에 존재할 것이라 생각합니다. $0 < x < \frac{1}{2}$ 은 $0 < x < 1$ 의 범위의 일부이고 $0 < x < \frac{1}{3}$ 은 $0 < x < \frac{1}{2}$ 의 일부이며 그 범위를 더 작게 나눠도 이는 그 전 범위에 일부로서 보다 작은 양수는 전체 범위의 일부분으로서 존재할 것이다.	S1, S2, S3, S7
	비존재	존재하지 않는다. $\frac{1}{\infty}=0$ 으로 알고 있기 때문에 보다 큰 부등식을 만족시킬 수가 없다.	S4, S5, S6, S7
2번 구간의 길이가 0으로 수렴하 는 축소 구간열의 무한 교집 합의 결과	무한히 작은 구간	n 이 자연수라면 다른 양수를 포함하는 구간이 될 수 있을 것 같습니다. 1번 논리에 의하면 어떤 자연수 a 가 있다면 $a+1$ 도 있습니다. $\therefore [0, 0.1] \cap \dots \cap [0, (0.1)^n] \cap \dots$ 은 결국 어떤 자연수에 의해 $[0, (0.1)^n]$ 로 정리될 것이며 이 구간에서는 $(0.1)^{n+1}$ 이 존재한다.	S1, S3
	{0}	무한 교집합 $[0, 0.1] \cap \dots \cap [0, (0.1)^n] \cap \dots$ 에 대하여 유한 교집합을 생각한다 $[0, 0.1] \cap \dots \cap [0, (0.1)^n] \cap \dots = [0, (0.1)^n]$ 이러한 과정을 무한 번 반복하게 된다면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (0.1)^n = 0$ 이 되므로 구간은 0에 수렴하게 될 것이다.	S2, S4, S5, S6, S7

Table 4 Summary of the responses to the task 3

코드명	$\lim_{h \rightarrow 0}$ 에서 h 의 취급	3번의 답변 유형($h \neq 0$ 은 아니지만 $h=0$ 을 대입한 것처럼 보이는 이유는 무엇인가?)
H1	0에 도달	$\lim_{h \rightarrow 0}$ 에서 언젠가 h 가 0에 도달할 것이므로 $h=0$ 이라고 할 수 있다.
H2	무한히 작은 양 ⁶⁾	$h \neq 0$ 이지만 h 는 0으로 봐도 무방할 정도로 충분히 작은 값이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} h+2$ 의 계산에서는 0을 대입하는 것이 가능하다.
H3	0에 가까워지는 변수	함숫값과 극한값은 다르다. $h \neq 0$ 이지만 $2+h$ 가 2에 한없이 가까워진다는 뜻에서 극한값이 2가 된다.
H4	식을 정리 후 대입	극한의 계산에서는 먼저 식을 정리한 후 대입해야 한다.

5) S7은 1-(1)과 1-(2)의 설문 답변에서 '존재한다'와 '존재하지 않는다'의 두 가지 답변 모두 가능할 것 같다고 설명하였다. S7은 1-(1)번에서는 '자연수는 끝이 없을 것 같기 때문에' 존재하지 않는다고 생각하면서도 '집합론에서 자연수는 C개..? 라고 배웠던 것 같아서 이게 끝이 있는 건지 의문이다'라고 하면서 존재할 수도 있다는 관점을 드러내었다. 이와 같이 S7은 1-(1)과 1-(2)에서 두 가지 답이 모두 가능할 것 같다고 설명하였기 때문에 S7의 답변은 '존재'와 '비존재' 모두에 포함시켰다.

6) 3번 문항에 대한 예비교사들의 설명에서 드러난 '무한히 작은 양'은 무한소의 실재성을 주장한 것인지, 실재하지는 않지만 극한을 설명하기 위한 표현 방법인지는 설문만으로는 알 수 없기 때문에 이를 인터뷰에서 파악하고자 하였다.

Table 5 Coding result of seven pre-service teachers' responses to the task 3

	H1	H2	H3	H4
S1			○	○
S2			○	
S3	○		○	
S4			○	
S5			○	
S6		○		
S7		○	○	

Figure 1 S3's response to the task 1-(1)

S3: 저희의 목적은 일단은 존재하는 것을 보고 싶기 때문에 그 한 놈을 찾아야 하기는 하는데 자연수가 계속 움직이고 있어가지고, 커지고 있어가지고 한 놈을 딱 따올 수는 없지만 저는 또 시간 개념으로 생각해서 계속 커지는 수, 맨 앞에 있는 수가 있지 않을까라는 생각 때문에 그 맨 앞에서 계속 움직이고 있는 수를 지금 여기다 가져와서 x 라고 생각합니다.

I: 맨 앞에 있는 수?

S3: 네. 아직 자연수는 끝에 가장 큰 수가 없고 계속 커지는 중이기는 한데 그 앞에 선두주자가 있다고 생각해서...맨 끝에 1등으로 달리고 있는 자연수를 x 라고 가져온 듯한 그런 느낌입니다.

...

S3: 자연수라는 놈 이렇게 화살표로 표시하면은 맨 앞에 있는 요놈을 x 라고 얘기한 것... (Figure 1)

예비교사 S3은 어떤 임의의 수보다 더 큰 수가 존재하고, 그것보다 더 큰 수가 존재하는 과정이 무한히 반복되기 때문에 무한히 큰 수 x 가 존재하며 이것이 '맨 앞에서 움직이고 있는 수', '선두주자'라고 설명하였다. 이와 같은 무한히 큰 수의 존재에 대한 S3의 설명방식은 무한소의 존재성에 대해서도 유사하게 드러났다. 다음은 ' $0 < x < 1, 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < x < \frac{1}{3}, 0 < x < \frac{1}{4}, \dots, 0 < x < \frac{1}{n}, \dots$ 의 모든 부등식을 만족시키는 수 x '의 존재성을 묻는 1-(2)번 문항에 대한 S3과의 인터뷰이다.

S3: 어떤 큰 자연수가 계속 존재하기 때문에 여기 분수의 분모에도 자연수가 오는 거니까 계속 작아질 수 있다고 생각해서 x 안에는 그 $\frac{1}{n}$ 이하로 좀 더 내려가도 x 안에는 어떤 분수가 포함될 수 있다고 생각을 했어요. 예를 들어서 자연수 a 가 우리가 생각했을 때 가장 작은 아니 가장 큰 수라고 생각하면 0부터 $\frac{1}{a}$ 사이에는 꼭 $\frac{1}{a+1}$ 이 있기 때문에 무조건 존재할 수밖에 없다고 생각을 했습니다.

I: $\frac{1}{n}$ 이 주어지면 $\frac{1}{n}$ 보다 작은 수를 찾을 수 있다라는 뜻인가요, 지금 쓴 게?

S3: 그거랑 비슷한 생각이기는 한데, 이거는 지금 0과 $\frac{1}{n}$ 이 아니라 그 이하로 무한대로 더 쪽 가니까 그거를 다 만족하는 x 를 찾는 거라서 무한대로 n 이 커지면, 커져도 그 안에 그것보다 더 안에 속하는 x 가 하나는 있을 수밖에 없다고 생각이 들었어요. 찾는 거랑 비슷한 생각이기는 해요.

I: 어쨌든 하나의 고정된 x 값이 이 모든 부등식을 만족할 수 있다고 생각한 거예요?

S3: 네 비슷한 것 같습니다. 맞는 것 같습니다.

.....

1번에서도 어떤 가장 큰 수를 찾을 수는 없지만 존재한다는 것을 알기 때문에 2번에서도 0과 어떤 가장 큰 수 분의 1 안에는 어떤 저 부등식을 다 만족하는 x 가 존재는 할 수 있는데 찾을 수는 없다고 생각합니다.

예비교사 S3은 ‘어떤 큰 자연수가 계속 존재하기 때문에’, 부등식의 ‘분수가 계속 작아질 수 있고’ ‘자연수 a 가 가장 큰 수라고 생각했을 때, 0부터 $\frac{1}{a}$ 사이에는 꼭 $\frac{1}{a+1}$ 이 있기 때문에 무조건 존재할 수밖에 없다’라고 하면서 1-(2)의 모든 부등식을 동시에 만족시키는 수 x 가 존재한다고 답하였다. S3은 2번의 축소구간열의 무한교집합의 결과에 대해서도 유사하게 설명하였다. S3은 2번 $[0, 0.1] \cap \dots \cap [0, (0.1)^n] \cap \dots$ 의 결과가 구간으로 나타날 것이라고 하면서 다음과 같이 설명하였다.

S3: 2번 문제도 1-(2)번이랑 비슷하다고는 생각하는데, 조금 다른 점이 교집합을 했기 때문에 무조건 오른쪽으로 가는, 오른쪽으로 갈수록 그 구간으로 정해진다고 생각을 하거든요. 그러니까 0과 0.1사이고 첫 번째 거는, 두 번째 거는 0.01사이고 그 다음은 마지막에는 $(0.1)^a$ 사이인데 그 이후로도 쪽 무한대로 가니까 무한대로 가는 쪽에 무조건 하나로 고정되는 순간이 어느 순간 있지 않을 생각을 했었어요. 그래가지고 예를 들어서 가장 큰 수 a 가 있다고 하면 그 0과 $(0.1)^a$ 으로 고정이 되면 그 안에는 무조건 $(0.1)^{a+1}$ 이 있다 이렇게 생각해서 1-(2)번처럼 찾는 거랑 되게 비슷한 생각을 한 것 같아요.

이와 같이 S3은 ‘가장 큰 수 a ’가 존재하기 때문에, 무한교집합의 결과가 0과 $(0.1)^a$ 사이의 구간으로 나타날 것이라고 답하면서, 그 구간은 0이외에 다른 수를 포함할 수 있다고 하였다. S3의 무한히 큰 수와 무한소의 존재에 대한 관점을 더 알아보고자, S3에게 양화사의 순서가 바뀐 다음 [(a) 진술]의 문장들을 제시하고 참, 거짓 여부를 질문하였다.

[(a) 진술]

① 어떤 수 x 가 존재하여, x 는 모든 자연수 n 보다 크다.

$$\exists x \forall n \in \mathbb{N}, x > n$$

② 모든 자연수 n 에 대하여, n 보다 큰 수 x 가 존재한다.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x \text{ s.t. } x > n$$

S3은 [(a) 진술]의 ①번과 ②번의 두 문장의 차이를 잘 알고 있었고 ①번 문장을 참이라고 답하였다. S3에게 아래의 [(b) 진술]에 대해서도 질문하였는데 S3은 [(b) 진술]의 두 문장의 의미 차이를 알고 있었고, ①번이 참이라고 답하였다. 다음으로 S3에게 아르키메데스 정리를 적어보도록 요청하였는데 S3은 거의 바르게 적었다. 그 후 S3에게 아르키메데스 정리를 이용하여 [(b) 진술]의 ①번 문항을 다시 생각해보라고 요청하였다.

[(b) 진술]

① 어떤 양수 x 가 존재하여, 모든 자연수 n 에 대해 $0 < x < \frac{1}{n}$ 을 만족한다.

$$\exists x \forall n \in \mathbb{N}, 0 < x < \frac{1}{n}$$

② 모든 자연수 n 에 대하여, $0 < x < \frac{1}{n}$ 을 만족하는 x 가 존재한다.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x \text{ s.t. } 0 < x < \frac{1}{n}$$

I: 그러면 ①번을 아르키메데스 원리로 다시 한 번 생각해 볼 수 있겠어요?

S3: 어? ①번이 성립하지 않네요.

I: ①번 성립하지 않는 것 같아요? 왜요?

S3: 여기서 x 는 양수이기 때문에, n 과 x 의 자리를 바꿔주면은 이렇게 되는데([(b) 진술]의 ①의 $0 < x < \frac{1}{n}$ 의 부등식 옆에 $n < \frac{1}{x}$ 를 적음), 모든 n 에 대해서 이게 성립한다고 했지만 이게 성립하지 않은 n 도 존재할 수 있기 때문에 틀렸다고 생각합니다.

S3은 아르키메데스 정리와 [(b) 진술]의 ①을 연결지어 보라는 요청 전에는 [(b) 진술]의 ①이 참이라고 답하였다. 그러나 아르키메데스 정리를 적용해보라는 요청을 받은 후 이 진술이 거짓이라고 답하며 그 이유를 잘 설명하였다. 즉, S3은 아르키메데스 정리를 이용해 달라는 연구자의 요구 전에는 수학적 공리와 정리들을 이용하기 보다는 본인이 가진 직관을 이용하여 답을 하였던 것이다. 이와 관련한 인터뷰 발췌문이다.

I: 제가 아르키메데스 성질을 꺼내기 전에 S3이 ... 이게 맞다고 생각한다고 얘기했었잖아요. 그때는 왜 그렇게 생각했는지 그런 것도 궁금합니다

S3: 그때는 진짜 뭐 해석하 그런 개념 하나도 생각 안 하고. 단순하게 그냥 보자마자 떠오르는 거를 생각했어요...그냥 대학교 전공에 대해서 전혀 생각 안 하고 약간 고등학교 때 저의 생각에 대해서 많이 바로 얘기했던 것 같아요.

...

I: 고등학교 때 어떻게 생각했는데요?

S3: 지금까지 얘기를 했던 게 약간 고등학교 때 주로 생각이고, 이런 아르키메데스까지 생각하면서 이거를 해결하려고 하면 머리를 막 좀 더 써야 되고, 제 그냥 기본으로 가지고 있던 마음, 생각이 아닌 것 같아서 그냥 바로 바로 떠오르는 대로 써가지고...

예비교사 S3은 [(b) 진술]의 ①에 대한 본인의 처음의 답은 '바로 떠오르는 생각대로' 즉 본인의 직관을 이용하여 연

구자들의 질문에 답하였으며 ‘아르키메데스 정리는 본인의 생각이 아닌 것 같다’라고 표현하였다. 즉, S3은 양화사가 포함된 문장이나 아르키메데스 정리를 바르게 이해하고 있었음에도 불구하고, 수학적 진술에 대해 정리나 공리에 근거하여 판단해야 한다고 생각하지 못한 것으로 보인다.

예비교사 S3은 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다고 생각하였으며, 본인이 생각하는 무한히 큰 수를 그림으로 표현하기도 하였다. 임의의 수보다 더 큰 수가 존재하고 이들이 반복되다 보면 가장 큰 수가 존재하게 된다는 S3의 설명은 잠재적 무한의 관점이 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다는 생각으로 이어진 것으로 보인다. 또한 S3은 해석학을 학습한 경험이 있고, 아르키메데스 정리를 잘 알고 있었음에도 무한히 큰 수와 무한소 존재의 판단을 해석학의 공리와 정리보다는 직관에 의해 판단하는 모습을 보였다.

2) 양화사가 포함된 문장에 대한 예비교사들의 이해

설문 문항 1-(1)번과 1-(2)번에 대한 답변에서 일부 예비교사들은 ‘존재한다’와 ‘존재하지 않는다’의 서로 다른 답변을 하면서 유사한 근거를 들어 설명하였다. 예를 들어, 1-(1)의 답변으로 ‘ n 보다 $n+1$ 이 더 크기 때문에 존재한다’, ‘존재할 수 없다. k 를 모든 자연수보다 큰 수라고 하면 $k+1$ 은 k 보다 큰 자연수다. 따라서 모순이다’와 같이 ‘임의의 n 에 대해 n 보다 큰 $n+1$ 이 존재’하기 때문에 질문에 해당하는 수가 ‘존재한다’ 혹은 ‘존재하지 않는다’는 상반된 답변을 하였다. 이에 예비교사들이 1-(1)번과 1-(2)번 문항을 어떻게 해석했는지, 그리고 1-(1)과 1-(2)에서 ‘존재한다’와 ‘존재하지 않는다’고 생각한 수가 무엇인지 인터뷰에서 확인하고자 하였다. 따라서 예비교사들에게 설문 문항 1-(1)을 (a) 진술의 ①번과 ②번 문장 중 어느 것으로 해석하였는지, 1-(2)를 (b) 진술의 양화사의 순서가 뒤바뀐 ①번과 ②번 문장 중 어느 것으로 해석했는지를 질문하였다. 인터뷰에 참여한 7명의 예비교사들 중 3명(S2, S3, S5)은 (a) 진술 또는 (b) 진술에서 각 ①번과 ②번의 의미 차이를 이해하고 있었지만, 4명(S1, S4, S6, S7)의 예비교사는 두 문장의 의미 차이를 구분하지 못하였다. 다음은 (b) 진술의 ①번과 ②번의 의미 차이에 대한 S6과의 인터뷰 발췌문이다.

S6: 이것도 같은 말을 하는 거라고 생각을 해요.

I: 아 문장 동일하게 느껴지세요?

S6: 네

...

I: 그래서 이거 순서 바뀌는 거는 의미의 차이가 안 생기게 하나요?

S6: 차이가 없는 것 같아요.

다음으로 예비교사들에게 양화사가 사용된 문장이면서 실수에서 무한히 큰 수와 무한소의 존재성에 대한 의미를 담고 있는 아르키메데스 정리를 알고 있는지를 질문하였다. 7명의 예비교사 중 4명(S2, S3, S4, S5)은 아르키메데스 정리를 거의 정확하게 진술했으며, 3명(S1, S6, S7)은 아르키메데스 정리를 정확하게 진술하지 못했다. 다음은 예비교사 S1이 아르키메데스 정리를 적은 후 설명한 내용이다(Figure 2).

S1: 어 임의의, 어떤 임의의 양수 na , a 와 b 가 있을 때 na 가 b 보다 큰 자연수 n 이 존재한다.

Figure 2 S1's response to the Archimedean property

$$\exists a, b > 0, na > b \exists n \in \mathbb{N}$$

Figure 3 S4's response to the Archimedean property

$$a, b \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } a < nb$$

예비교사 S1은 아르키메데스 정리를 정확하게 기억하지 못하였으며 존재양화사 ‘ $\exists$ ’를 ‘임의의’로 읽기도 하였다. 한편 예비교사 S4의 경우 아르키메데스 정리를 비교적 바르게 진술했음에도 불구하고 아르키메데스 정리와 [(b) 진술]의 ①을 연결하는 데 실패하였다. Figure 3은 예비교사 S4가 아르키메데스 정리를 표현한 것이다.

S4에게 본인이 적은 Figure 3의 아르키메데스 정리를 이용하여 [(b) 진술]의 ①번 문장을 생각하도록 요청하였다. S4는 아르키메데스 정리를 이용하여 이 문장의 참, 거짓 여부에 대해 설명하려고 노력하였으나 성공하지 못하였다. 또 인터뷰 중 [(b) 진술]의 ①번과 ②번의 문장의 의미 차이를 파악하지 못한 모습을 보였다. S4는 아르키메데스 정리를 기억하고 있었지만 [(b) 진술]의 양화사가 포함된 수학적 문장의 의미를 이해하지 못했기 때문에 아르키메데스 정리와 이 문장들을 연결시키지 못한 것으로 보인다.

[(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 ①번과 ②번의 의미 차이를 이해한 세 예비교사(S2, S3, S5)는 아르키메데스 정리를 비교적 정확하게 진술할 수 있었으며 [(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 진술 ①과 아르키메데스의 정리를 연결할 수 있었다. 그러나 양화사의 순서의 변화로 인한 의미 차이를 인지하지 못한 예비교사들(S1, S4, S7)⁷⁾은 아르키메데스 정리를 이용하여 [(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 문장의 성립여부를 판단하지 못하였다. 특히 S4는 아르키메데스 정리를 기억하고 있었으나 아르키메데스 정리와 다른 수학 진술을 연결시켜 생각하는데 실패하였다. 결국 보편양화사와 존재양화사의 순서 변화에 따른 의미 차이를 인지한 예비교사들의 경우, 1-(1) 또는 1-(2)에서 무한소와 무한히 큰 수의 존재성을 아르키메데스 정리를 이용하여 판단할 수 있었지만, 양화사의 이해가 부족한 교사들은 이에 성공하지 못하였다.

즉 연구결과 일부 예비교사들은 양화사가 포함된 해석학의 담론에 익숙하지 않은 것으로 드러났다. 해석학의 많은 정리들은 양화사가 포함된 문장으로 표현되기 때문에 예비교사들이 양화사가 포함된 문장의 이해에 어려움을 겪는다는 사실을 주목할 만하다. 어떤 명제들이 갖는 수학적 의미를 파악하기 위해서는 그 진술들이 표현되는 문장의 어휘나 구조에 대한 이해는 필수적인데, 이들에 대한 이해의 부족이 예비교사들의 해석학의 담론으로 불완전한 전환에 영향을 미친 것으로 여겨지기 때문이다.

3) 예비교사들의 극한의 이해 방식

문항 1-(2)와 관련된 인터뷰에서 무한소가 존재한다고 했던 예비교사(S3)뿐 아니라, 존재하지 않는다고 했던 일부 예비교사들(S6, S7)도 무한히 작은 양의 표현을 사용하여 극한을 설명하는 모습을 보였다. S6은 Newton의 유율법에 대한 Berkeley의 비판과 관련한 문항인 3번에 대한 인터뷰에서 h 는 ‘0은 아닌데 0이라고 봐도 상관없을 정도로 아주 작은 ϵ ’라고 표현하면서 무한히 작은 양을 이용하여 극한을 설명하였다.

7) 인터뷰 과정에서 아르키메데스 정리를 이용하여 [(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 성립여부를 판단하라는 질문은 S6을 제외한 S1, S2, S3, S4, S5, S7에게만 하였다.

I: 여기 (문항 3의) ①번에서는 0이 아니어서 h 를 나눴습니다. 그런데 0이 아닌데 왜, ②번에서는 대입하는 게 가능하지? 누군가 질문을 하면 이 식이 혹시 이런 과정이 (문항 3의) ①번과 ②번이 서로 모순되는 거 아닌가라고 질문을 하면 어떻게 답변을 해주시겠어요?

S6: 그때도 그냥 h 는 0은 아닌데 0이라고 봐도 상관없을 정도로 아주 작은 애라서 0을 대입해도 값은, 결과를 내는 데는 문제없을 것 같다고 얘기를 할 것 같아요.

S7 또한 문항 3에서 ' h 가 굉장히 작아지니까, 거의 0처럼 생각해도 된다고 생각을 해서 그냥 $2+0$ 은 2다 이런 식으로 생각을 했어요'와 같이 h 를 무한히 작은 수로 언급하면서 극한을 설명하였다.

예비교사들의 극한의 이해 방식을 알아보기 위해 설문 문항 3번과 관련하여 $\lim_{h \rightarrow 0} h$ 와 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h}$ 의 극한의 차이에 대해 질문하였다. 이와 관련한 S3과의 인터뷰 내용의 일부이다.

S3: 일단 $\frac{h^2}{h}$ 에서 우극한이라고 한다면 아직 0은 아니기 때문에 0에 정말 가깝고 싶지만 0은 아니기 때문에 약분이 가능한데, 리미트 h 같은 경우는 0에 엄청 가까운 수를 대입하면 0뽀 플러스라고 나오기는 하지만 우리는 결국 그거를 0이라고 약속을 한다, 이렇게 일단 얘기를 할 것 같습니다.

이후 Figure 4의 두 함수 $y=h$ 와 $y=\frac{h^2}{h}$ 의 그래프를 제시하면서 이들 함수의 0에서의 극한값을 다시 질문하였다.

I: (오른쪽 그래프 $y=\frac{h^2}{h}$ 를 가리키며) 그러면 이거의 극한값은 뭐라고 생각을 해요?

S3: 0 플러스, 0 마이너스라고 쓸 것 같습니다.

I: 아 그래요 한번 써 볼래요? 이게 무슨 뜻이에요?

S3: 극한값에 두 종류가 있다고 생각해서...($\lim_{h \rightarrow 0} h = \pm 0$ 을 씀). 일단 0으로 가까이 가기는 하지만, 시

Figure 4 Graphs of functions $y=h$ and $y=\frac{h^2}{h}$

간의 개념으로 생각을 해봐도 결국에는 0으로 도달할 수 없는 상황이기 때문에... 결국 0에 도달하지는 못하지만, 0에 정말 가까워진 후에 멈출 것이라고 생각해서, 우극한 0+ 좌극한 0-라고 두 가지 값이 나올 것 같다고 생각을 했습니다.

I: 아 그래요? 음 혹시, 그래서 이거는 우극한 0+ 그 다음에 좌극한 0-...그러면 이 0+의 의미가 뭔지 좀 더 설명해 줄 수 있어요?

S3: 0+는 0에 한없이 가까운 수지만 영에 도달하지는 못한 수이기 때문에...

S3은 인터뷰에서 h 가 0에 도달할 수 없으면서 '0에 가까워진 후 멈춘다' 따라서 '리미트 h 는 0에 엄청 가까운 수를 대입'한다고 말하며 무한히 작은 수를 이용하여 극한을 설명하였다. 또한 S3은 $\lim_{h \rightarrow 0} h$ 의 극한값을 0+ 또는 0-로 표현하면서 '0에 한없이 가까운 수지만 영에 도달하지는 못한 수'이고 '0이라고 약속을 한다'라고 말하면서 극한의 계산에서 무한히 작은 양을 약속에 의해 소거하여 설명하는 형태를 보였다⁸⁾.

극한에 대한 설명에서 일부 예비교사들은 '무한히 작은 양'을 사용하는 모습을 보였다. S3은 설문문항 1-(2)에서 무한소가 존재한다고 하였으며 S6은 존재하지 않는다고 하였고, S7은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다고 답하였다. 따라서 S6, S7은 무한소의 실재성을 주장한 것이 아니기 때문에 S6, S7과 S3의 표현에 등장하는 무한히 작은 양은 그 의미가 같지 않을 수 있다. 하지만 이들은 모두 극한의 설명에서 무한히 작은 양의 표현을 활용하는 모습을 보였다.

V. 결론 및 논의

본 연구는 해석학을 이미 학습한 예비교사들을 대상으로 무한히 큰 수와 무한소에 대한 인식 및 극한의 설명 방식을 조사하였다. 예비교사들은 무한히 큰 수와 무한소의 존재 및 극한에 대한 인식에서 다양한 모습을 보였으며 특히 일부 예비교사들의 극한의 설명은 해석학의 설명과 차이가 있었다. 본 절에서는 해석학 담론과 공약불가능했던 예비교사 담론의 양상을 중심으로 논의하고자 한다.

첫째, 일부 예비교사들은 극한의 설명에서 무한히 작은 양에 의존하였으며, 따라서 극한에 대한 구체적 내러티브는 해석학의 담론과 다른 양상을 보였다. 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다고 생각했던 예비교사 S1과 S3뿐 아니라, 설문문항 1-(2)의 의미로 무한소가 존재한다고 생각하지는 않았던 S6, S7도 극한의 설명에서 '무한히 작은 양'에 의존하는 모습을 관찰할 수 있었다. 이들은 해석학을 학습하였지만 극한을 ε - δ 정의를 사용하여 설명하지 않았으며, $\lim_{h \rightarrow 0}$ 식의 h 에 대해 ' h 가 굉장히 작아지니까 거의 0처럼 생각(S7)', ' h 는 0은 아닌데 0이라고 봐도 상관없을 정도로 아주 작은 애라서 0을 대입해도 결과를 내는 데는 문제없을 것 같다(S6)', '0에 도달하지는 못하지만, 0에 정말 가까워진 후에 멈출 것(S3)'과 같이 무한히 작은 양을 이용하여 표현하고 있었다. 해석학의 ε - δ 의 극한의 정의에서는 h 가 0으로 다가가지 않으며 무한히 작은 수도 아니다. 해석학에서는 설문문항 3에서 등장하는 극한 $\lim_{h \rightarrow 0} (2+h)=2$ 을 '임의의 ε 에 대해 h 를 충분히 작게 하면 $2+h$ 와 2와의 차이를 ε 보다 작게 할 수 있다'고 설명한다. 즉 연구결과와 설문 문항과 인터뷰

8) S3은 설문조사와 인터뷰에서 h 의 '0에 도달가능성 여부'에 대해 주목하였지만 그 설명 방식은 일관되지 않았다. S3은 설문문항에서는 ' h 가 0에 도달할 것'이라고 언급한 반면 인터뷰에서는 ' h 는 0에 도달할 수 없는 상황'이라고 하였다.

에서 무한소가 존재한다고 했던 예비교사와 무한소의 존재성을 주장하지는 않았음에도 극한을 무한히 작은 양을 사용하여 설명했던 예비교사들의 극한에 대한 내러티브는 해석학의 담론과는 달랐다.

특히 S3의 '리미트 h 같은 경우는 0에 엄청 가까운 수를 대입하면 0뽀 플러스라고 나오기는 하지만 우리는 결국 그 거를 0이라고 약속을 한다'는 극한에 대한 설명은 해석학 담론보다는 Leibniz의 무한소 담론 혹은 현대의 비표준해석학의 담론과 더 가까웠다. Leibniz는 무한소를 미적분학의 이론 전개에 사용하였으며, 무한히 작은 양을 계산과정에서 소거하였다. 현대의 비표준해석학 역시 무한소와 무한히 큰 수를 존재하는 대상으로 받아들이며 극한에서 활용한다. 비표준해석학에서는 $\lim_{h \rightarrow 0} (2+h)$ 에서 h 를 0에 무한히 가까운 수로 둔 후 standard part를 취하여 $st(2+h)=2$ 로 극한값을 구한다. S3의 h 에 '0에 엄청 가까운 수를 대입'하면 '0+의 값이 나오긴 하지만 0으로 약속한다'는 설명은 해석학 담론의 ε - δ 극한 정의보다는 비표준해석학의 standard part를 이용한 계산과정과 그 양상이 유사하며, 무한히 작은 양을 계산과정에서 소거한 Leibniz의 극한의 이해와도 유사했다. 또한 S3는 설문문항 2의 축소구간열의 무한교집합의 결과를 $\{0\}$ 이 아닌 구간이 된다고 답변하기도 하였다. 이론적 고찰 결과 설문문항에 제시된 ...의 기호는 비표준해석학에서는 다양한 해석이 가능하였다. ...을 극한으로 해석한다면 축소구간열의 결과 한 점 집합이 되지만, ...을 무한히 큰 초실수 H 에서 종결되는 무한으로 해석한다면 구간으로 해석이 가능하다. 이러한 관점에서 축소구간열의 무한교집합의 결과가 구간이 된다고 한 S3 답변은 해석학의 결과와는 달랐지만, 비표준해석학의 관점에서 옹호될 수 있다. 즉, S3가 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다고 믿으며, 무한소를 극한의 정당화에서 활용하고 standard part와 유사한 설명방식을 보인 것, 축소구간들의 무한교집합의 결과를 구간으로 답한 것에서 S3의 담론은 해석학보다는 비표준해석학의 담론과 더 가깝다고 여겨진다.

둘째, 해석학의 여러 공리와 정리들은 양화사를 사용한 문장으로 기술되지만, 인터뷰 결과 일부 예비교사들은 양화사가 사용된 문장을 정확하게 해석하지 못하였다. 7명중 4명의 예비교사(S1, S4, S6, S7)는 보편/존재 양화사의 순서가 반대인 두 진술 사이의 의미 차이를 식별하지 못했다. 또한 이들은 아르키메데스 정리를 이용하여 양화사가 포함된 문장, 특히 무한히 큰 수의 존재 또는 무한히 작은 수의 존재에 대한 수학적 진술을 해석하는데 성공하지 못하였다(S1, S4, S7). 특히 S4는 아르키메데스 정리를 비교적 바르게 기억하고 있었음에도 불구하고 아르키메데스 정리를 이용하여 무한히 큰 수와 무한히 작은 수의 존재를 판단하지 못하였다. S4의 사례는 해석학의 특정 정리를 기억하더라도 양화사 이해의 부족으로 정리의 의미 파악 및 다른 문장에서의 적용에 실패할 수 있음을 보여준다.

여러 연구자들은 학생들이 두 개 이상의 양화사가 포함된 수학적 문장 이해에 어려움을 겪고 있음을 보고했으며(Dawkins & Roh, 2011; Dawkins & Roh, 2019; Dubinsky & Yiparaki, 2000; Roh, 2010), 본 연구에서도 양화사의 이해는 무한소와 무한히 큰 수가 존재하지 않는다는 실수체계의 성질에 대한 이해와 더불어 예비교사들이 해석학 담론으로의 이행과정에서 겪는 어려움을 확인할 수 있었다.

셋째, 일부 예비교사들은 여전히 직관적인 수준에 머물러 있으며 공리와 정리에 의해 수학적 진술의 승인 여부를 판단하는 메타규칙을 수용하지 못한 모습을 보였다. 무한히 큰 수 또는 무한소의 존재성에 대한 인터뷰에서 연구자가 언급하기 전에 아르키메데스 정리와 같은 해석학의 정리를 이용하여 참 또는 거짓 여부를 판단한 예비교사는 단지 1명(S2)이었다. 다른 6명의 예비교사들은 연구자의 질문에 대해 답변을 하면서 공리를 이용하려고 시도하지 않았으며 그들이 가진 직관에 기초하여 설명하였다. 이와 같이 일부 예비교사들은 해석학을 학습했음에도 불구하고 공리와 정리들을 이용하여 수학적 진술의 승인 여부를 판정하는 해석학의 메타규칙은 아직 내면화하지 못했음을 알 수 있었다.

특히 예비교사 S3은 인터뷰 내내 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다고 생각했으며, '무한소의 존재'를 의미하는 문장의 참, 거짓을 판단해보라는 질문에 대해 '참'이라고 답하였다. 하지만 예비교사 S3은 양화사의 순서 변화에 따른

의미 차이를 잘 이해하고 있었으며, 아르키메데스 정리 또한 알고 있었다. 이후 연구자가 아르키메데스 정리를 이용하여 '무한소'의 존재성을 다시 생각해보라고 요청하자, 아르키메데스 정리에 의하면 무한소가 존재하지 않는다는 점을 깨닫고 그 이유에 대해 바르게 설명하였다. S3은 양화사나 아르키메데스 정리를 알고 있었음에도 불구하고 정리를 사용해보라는 요구 전에는 공리나 정리에 근거하기 보다는 본인이 가진 기본적인 직관을 사용하여 명제의 참 거짓을 판단하였다. 이로부터 S3은 해석학의 정리는 알고 있었지만 수학의 진술의 참, 거짓 여부에 대한 판단의 기준이 여전히 직관적인 수준에 머물러 있으며 형식적인 해석학적 담론으로 불완전하게 이행한 것으로 보인다.

이와 같이 일부 예비교사들의 담론은 해석학과 메타규칙에서 달랐으며, 또 무한소와 무한히 큰 수를 포함하는 수 체계에 대해 생각하고 있다는 것에서 '수'의 개념에서 차이가 있었다. 또한 일부 예비교사들은 극한을 이해할 때도 해석학의 정리를 이용하기보다는 '무한히 작은 수'를 활용하여 이해하고 있었으므로, 예비교사들의 극한에 대한 내러티브는 해석학의 내러티브와 달랐다. 즉 일부 예비교사들의 담론은 해석학의 담론과 메타규칙, 승인된 내러티브, 수학적 대상의 존재성에서 차이가 있었으며, 이러한 측면에서 일부 예비교사들의 담론은 해석학의 담론과 공약불가능하였다. 특히 S3의 내러티브는 해석학의 담론보다는 Leibniz의 담론과 비표준해석학의 담론과 유사한 측면이 있었다. 본 연구의 결과를 정리하면 아래의 Table 6과 같다.

과학의 역사와 수학의 역사는 모두 급진적인 발달을 겪어왔다. 이 급진적인 발달의 단계에서 학자들은 이론들의 공약불가능성으로 인해 다른 이론을 이해하거나 받아들이지 못하였다. 이러한 현상은 비단 과학과 수학의 학문 연구에서만 일어나는 일은 아니다. 이는 중등학교와 대학에서 수학을 공부하는 학습자들이 급격한 이론의 전환의 단계에서 경험하는 현상이다. 담론 사이의 공약불가능성 현상과 담론들을 지배하는 메타규칙들은 명시적으로 드러나는 존재가 아니다. 따라서 학습자는 이러한 메타규칙의 변화와 공약불가능성의 존재를 스스로 인지하기 어려우며 교수자는 학습자가 이들을 대면하고 극복할 수 있도록 조력자 역할을 해야 한다. 또 공약불가능한 담론 사이에 발생하는 코모그니티브 갈등은 학생들의 메타수준의 학습을 촉진시키는 원동력이 될 수 있지만, 코모그니티브 갈등의 해소는 쉽지 않기 때문에 역시 교수자의 적극적인 개입이 필요하다(Sfard, 2007). 따라서 본 연구는 예비교사들의 해석학의 담론으로의 이행 즉, 교사 교육에서 메타수준의 학습을 위해 세 가지를 제안하고자 한다.

Table 6 *The incommensurability between the discourses of pre-service teachers and analysis*

예비교사들의 담론		해석학의 담론
메타규칙	공리보다는 직관에 의해 수학적 진술의 참, 거짓여부를 판단함.	공리와 정리에 기반하여 참, 거짓 여부를 판단함.
한 내러티브에서만 사용되는 용어가 존재하는가?	무한히 큰 수와 무한소의 사용	무한소와 무한히 큰 수는 아르키메데스 정리에 의해 존재하지 않음.
담론 사이에 모순된 내러티브가 존재하는가?	무한히 큰 수가 존재한다. 무한소가 존재한다 $[0, 0.1] \cap [0, 0.01] \cap \dots [0, (0.1)^n] \cap \dots$ 의 무한교집합은 0이외의 수를 포함하는 구간이 된다.	무한히 큰 수는 존재하지 않는다. 무한소는 존재하지 않는다. $[0, 0.1] \cap [0, 0.01] \cap \dots [0, (0.1)^n] \cap \dots$ 의 무한교집합은 0만 포함한다.
동일한 기호를 다른 방식으로 이해하는가? (극한기호 $\lim_{h \rightarrow 0}$ 가 포함된 식의 이해)	h 는 0에 도달하지는 못하지만, 0에 정말 가까워진 후에 멈출 것(S3) h 가 굉장히 작아지니까 거의 0처럼 생각(S7) h 는 0은 아닌데 이라고 봐도 상관없을 정도로 아주 작은 애라서 0을 대입해도 결과를 내는 데는 문제없을 것 같다(S6)	ε - δ 의 극한의 정의를 사용하여 이해함.

첫째, 예비교사들에게 학교수학의 담론과 해석학 담론 사이의 메타규칙의 변화에 대해 명시적으로 제시하는 것이 도움이 될 수 있을 것이다. 메타규칙은 종종 암묵적인 곳에 감추어져 있으며 학생 스스로 이것을 깨닫는 것은 쉬운 일이 아니므로 교수-학습의 동의 및 지도자의 역할은 매우 중요하다(Sfard, 2007). 해석학에서는 직관적인 판단보다는 공리와 정의에 의해 판단을 해야 한다는 메타규칙을 명확히 함으로써 예비교사들로 하여금 본인의 메타규칙을 반성하고 새로운 메타규칙의 존재를 대면하는 기회를 제공할 수 있을 것이다.

둘째, 아르키메데스 정리가 해석학의 다른 정리들을 증명하는데 이용되는 것 이외에도 이 정리는 무한히 큰 수와 무한소가 존재하지 않는다는 것을 함축한다는 사실을 명확히 제시하는 것 또한 의미가 있을 것이다. 많은 선행연구들이 대학 학부 학생들이 여전히 무한소가 존재한다는 관점을 갖고 있음을 논의하였으며 본 연구에서 이를 재확인하였다. 아르키메데스 정리에 의해 무한히 큰 수와 무한소가 존재하지 않으며, 해석학에서는 메타규칙의 변화로 직관적인 판단보다는 정리와 공리를 따라 판단해야 함을 명확히 함으로써 예비교사들은 무한히 큰 수와 무한소에 대한 직관과 해석학의 관점의 차이에 대해 생각해 볼 수 있을 것이다.

셋째, 수학 진술에 포함된 수학적 정의나 정리의 의미에 대한 교육과 더불어 양화사가 포함된 문장 구조에 대한 교육이 병행되어야 함을 제안한다. Roh & Lee (2011)는 일상언어에서 양화사가 포함된 문장을 생각해보는 활동이 해석학의 진술들의 이해를 도울 수 있음을 논의한 바 있다. 이와 같이 교사교육에서 양화사에 대한 예비교사들의 어려움을 인식하고 양화사가 포함된 일상언어로 표현된 문장의 이해를 돕는 활동을 병행하는 것이 수학적 정리나 명제들의 의미를 파악에 도움이 될 것이다.

예비교사들은 추후 학교에서 학생의 지식과 교과 지식을 연결하는 역할을 하게 된다. 학교수학은 무한히 큰 수와 무한소가 배제된 해석학의 관점에서 전개되므로 예비교사들이 무한소 관점에서 가르친다면 이 연결이 효과적이기 어렵다. 따라서 교사교육에서 예비교사들이 자신의 담론을 되돌아보며, 무한소 담론과 해석학의 담론에서 각각 수학적 개념과 정리들을 이해하고 활용하는 것은 어떤 차이가 있는지에 대해 파악하며 두 담론 관계를 한 단계 높은 위치에서 바라볼 수 있는 기회를 갖도록 하는 것이 필요하다. 본 연구가 이러한 교사교육의 기초 자료로 활용되기를 기대한다.

CONFLICTS OF INTEREST

No potential conflict of interest relevant to this article was reported.

REFERENCES

- Bair, J., Błaszczyk, P., Ely, R., Henry, V., Kanovei, V., Katz, K. U., Katz, M. G., Kutateladze, S. S., McGaffey, T., & Reeder, P. (2017). Interpreting the infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler. *Journal for general philosophy of science*, 48(2), 195-238.
- Bueno, O. (2007). Incommensurability in mathematics. In B. van Kerkhove & J. P. van Bendegem (Eds.), *Perspectives on mathematical practices* (pp. 83-105). Dordrecht: Springer.
- Cajori, F. (1917). Discussion of fluxions: from Berkeley to Woodhouse. *The American Mathematical Monthly*, 24(4), 145-154.
- Chang, H. S. (2020). A discourse analysis of middle school students in mathematical modeling teaching and learning. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 23(1), 45-65.

- 장현석 (2020). 수학적 모델링 교수·학습에서 중학생들의 담화 분석. *한국학교수학회논문집*, 23(1), 45-65.
- Cooper, J., & Lavie, I. (2021). Bridging incommensurable discourses-A commognitive look at instructional design in the zone of proximal development. *The Journal of Mathematical Behavior*, 61, 100822.
- Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. New York: Oxford University Press.
- Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area in students and in history. *The College Mathematics Journal*, 32(2), 99-109.
- Dawkins, P. C., & Roh, K. (2011). Mechanisms for scientific debate in real analysis classrooms. In *Proceedings of the 33rd conference of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 820-828).
- Dawkins, P. C., & Roh, K. H. (2019). Assessing the influence of syntax, semantics, and pragmatics in student interpretation of multiply quantified statements in mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-22.
- Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in collegiate mathematics education IV*, 239-286.
- Ely, R. E. (2007). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Wisconsin-Madison.
- Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM*, 46(4), 635-646.
- Jung, Y. J., Kang, H. Y. (2008). A study on infinitesimal interpretation of definite integral. *School Mathematics*, 10(3), 375-399.
- 정연준, 강현영(2008). 정적분의 무한소 해석에 대한 고찰. *학교수학*, 10(3), 375-399.
- Katz, K. U., & Katz, M. G. (2010). When is .999... less than 1? *The Montana Mathematics Enthusiast*, 7(1), 3-30.
- Keisler, H. J. (2007). *Foundations of infinitesimal calculus*. Retrieved from <https://people.math.wisc.edu/~keisler/foundations.pdf>.
- Keisler, H. J. (2012). *Elementary calculus: An infinitesimal approach*. New York: Dover Publications, Inc..
- Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Kwon, O. N., Shin, J. K., Jun, I. T., Kim, M. J., Kim, C. H., Kim, T. H., Park, J. H., Park, J. S., Park, J. H., Park, C. H., Park, H. K., Oh, K. H., Cho, K. H., Cho, S. H., & Hwang, S. M. (2017). *High school text book mathematics II*. Seoul: Kyohaksa.
- 권오남, 신준국, 전인태, 김미주, 김철호, 김태홍, 박재희, 박정숙, 박지현, 박찬호, 박효근, 오국환, 조경희, 조상현, 황성문(2017). *고등학교 수학 II*. 서울: 교학사.
- Oberheim, E. (2005). On the historical origins of the contemporary notion of incommensurability: Paul Feyerabend's assault on conceptual conservatism. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 36(2), 363-390.
- Oh, T. K., Park, M. M., & Lee, K. H. (2014). The relationship between cognitive conflicts and commognitive conflicts in mathematical discussion. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 24(2), 125-143.
- 오택근, 박미미, & 이경화. (2014). 수학적 토론에서 의사소통적 갈등과 인지 갈등의 관계. *수학교육학연구*, 24(2), 125-143.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics*, 14(3), 235-250.
- Park, J. H., & Lee, K. H. (2014). A study on meta-level learning through modeling activities. *School Mathematics*, 16(3), 409-444.
- 박진형, & 이경화. (2014). 모델링 활동을 통한 메타수준 학습에 대한 연구. *학교수학*, 16(3), 409-444.
- Piatek-Jimenez, K. (2010). Students' interpretations of mathematical statements involving quantification. *Mathematics Education Research Journal*, 22(3), 41-56.
- Roh, K. (2010). Why does the order of variables matter in logical contexts? A case of the limit of a sequence. In M. Pinto & T.

- Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 89-96). Belo Horizonte, Brazil.
- Roh, K. H., & Lee, Y. H. (2011). The Mayan activity: A way of teaching multiple quantifications in logical contexts. *PRIMUS*, 21(8), 685-698.
- Rorty, R. (1979). *Philosophy and the Mirror of Nature*. Princeton: Princeton university press.
- Seo, H. S., & Lee, K. H. (2020). Aspects of commognitive conflict and their role for learning in class learning the monotonicity of functions, *School Mathematics*, 22(3), 609-630.
- 서호성, & 이경화. (2020). 함수의 증가와 감소 수업에서 드러난 커머그니티브 갈등의 양상과 학습에서의 역할. *학교수학*, 22(3), 609-630.
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The journal of the learning sciences*, 16(4), 565-613.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2021). Taming Fantastic Beasts of Mathematics: Struggling with Incommensurability. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-33.
- Shin, B. M. (2009). High School Students' Understanding of Definite Integral. *School Mathematics*, 11(1), 93-110.
- 신보미(2009). 고등학생들의 정적분 개념 이해. *학교수학*, 11(1), 93-110.
- Stewart, I. (2010). *Professor Stewart's hoard of mathematical treasures*. New York: Basic Books.
- Tall, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. In *short communications, Fourth International Congress on Mathematical Education* (p. C5).
- Wade, W. R. (2014). *Introduction to Analysis: Pearson New International Edition*. Pearson Education.
- Whitehead, A. (1948). *An Introduction to Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.