Original Article

‘매개변수로 나타낸 함수’에 대한 교과서 구성과 교사 인식에 관한 연구

양성현[†]

한국교육과정평가원 연구위원

A Study on the Textbook Composition and Teacher Perception on ‘The Function Represented by a Parameter’

Seong Hyun Yang[†]

Research Fellow, Korea Institute for Curriculum and Evaluation, South Korea

Abstract

수학은 다른 어떤 학문보다도 용어의 명료성과 일관성이 중요한 학문이다. 수학 용어는 수학적 개념을 이해하는데 중요한 단서가 될 뿐만 아니라 학습 과정과 학습 후 그 개념과 관련된 이미지를 환기시켜 줄 수 있다. 그러나 학생이 특정 수학 용어에 대하여 오개념이 형성된 경우 환기된 이미지가 본래의 수학적 개념과 잘 부합되는 못하는 상황이 발생할 수 있다. 본고는 교과서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현의 불명료함과 비일관성을 지적하고 이로 인하여 발생하는 교사 인식을 조사하였다. 교사 인식 조사 결과 해당 표현에 대하여 교사들은 다양한 인식을 하고 있었으며 일부 교사들은 수학적 오개념을 가지고 있는 것으로 나타났다. 또한 많은 교사들이 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에 대하여 수정의 필요성을 인식하고 있음을 확인하였다. 교과서 및 교사용 지도서가 수학 용어에 대하여 명료성과 일관성을 갖추기 못할 경우 교사는 수학적 개념에 대하여 부정확한 개념을 생성할 수 있으며 이는 학생들에게 직간접적인 영향을 미칠 수 있다.

핵심어: 매개변수로 나타낸 함수, 교사 인식, 교과서, 교사용 지도서

Clarity and consistency of terms are more important in mathematics than in any other discipline. Mathematics terminology can be an essential clue to understanding a mathematical concept. Moreover, it can evoke images related to the concept both during the learning process and after learning. However, the evoked image may fail to match the original mathematical concept accurately if a student has a misconception about a specific mathematical term. This paper specified the ambiguity and inconsistency of the expression “the function represented by a parameter” used in textbooks. Further, it investigated the teachers’ perceptions caused by the phrase. Teacher responses in a survey showed that teachers perceived the words in various ways, and some teachers demonstrated mathematical misconceptions. Additionally, the teachers recognized the need to revise the phrase, “the function represented by a parameter.” Our study implicates that unclear and inconsistent uses of mathematical terms in textbooks and teacher’s guide books might contribute to teacher misunderstandings, which can directly or indirectly affect students.

Keywords: function represented by a parameter, teacher perception, textbook, teacher’s guide book

Received: December 29, 2021 **Revised:** January 21, 2022 **Accepted:** January 21, 2022

[†]**Correspondence:** Seong Hyun Yang, yangsh90@kice.re.kr

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4183-252X>

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>), which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
Copyright © The Korea Society of Educational Studies in Mathematics

I. 서론

학교수학에서 많은 수학적 개념들이 수학 용어에 의하여 시작되며 수학 교수·학습 상황에서 수학 용어는 상당한 영향력을 미치고 있다(Han, 1998; Kim & Park, 1994; Park, 2003; Park & Yim, 1998). 수학 용어는 수학적 개념을 이해하는데 중요한 단서가 될 뿐만 아니라 학습 과정과 학습 후 그 개념과 관련된 이미지를 환기시켜 줄 수 있다(Vinner, 1991). 그러나 학생이 특정 수학 용어에 대하여 오개념이 형성된 경우 환기된 이미지가 본래의 수학적 개념과 잘 부합되는 못하는 상황이 발생할 수 있다.

오개념은 학생 개인의 지식 체계와 강한 연결성을 지니고 있기 때문에 위계성과 연계성이 강한 수학 교과의 특성상 후속 학습에 대한 이해와 새로운 개념 형성에 장애물이 될 수 있다(Nam, 2011). 이러한 수학적 오개념은 다양한 요인에 의하여 발생할 수 있다. Nam (2011)은 오개념 형성 요인을 내적 요인과 외적 요인으로 구분하고, 외적 요인 중 교사 요인(교사가 개념에 대한 이해가 부족하거나 잘못된 설명 등)과 교과서 요인(개념 진술의 오류나 불명료함, 용어의 잘못된 선택 및 문장의 문법적 구조에 따른 의미의 차이 등)을 가장 중요한 요인으로 분류하였다.

특히 특정한 수학적 개념에 대하여 오개념을 형성한 교사의 경우 교수·학습 상황에서 잘못된 개념을 학생들에게 설명하는 경향이 있으며(Ben-Her, 2006), 이러한 경우 학생들의 지식 체계에 잘못된 수학적 개념이 생성될 수 있다. 이처럼 교사가 가지는 수학적 오개념은 학생들에게 직접적인 영향을 미칠 수 있다(Yang, 2019). 학생의 인지 구조에 한번 형성된 수학적 오개념을 학생 스스로 수정하는 것은 상당히 어렵기 때문에 이를 수정하기 위해서는 교사의 역할이 무엇보다도 중요하다(Ben-Her, 2006).

교과서와 교사용 지도서는 교사가 교수·학습을 준비하고 적용할 수 있도록 안내하는 나침반과 같은 역할을 한다(Yang, 2021). 교과서나 교사용 지도서 상의 수학적 개념 진술의 불명료함과 비일관성은 Nam (2011)이 지적한 바와 같이 교사와 학생 모두에게 오개념을 생성할 수 있으며 이는 학생들에게 필연적으로 전이될 수밖에 없다.

수학적 용어와 기호에 대한 이해는 수학 학습의 기초라 할 수 있다. 교과용도서에 사용되고 있는 수학 용어 개선에 대한 연구(Han, 1998; Kim & Park, 1994; Park, 2003; Park & Yim, 1998)와 수학 용어와 기호의 다양성에 대한 연구(Park, 2013; Yang, 2017)는 지속적으로 이루어져 왔다. Nam (2011)과 Park (2013)은 교과서 및 사전 등에서 사용하는 수학 용어에 대한 일관성 있는 진술의 필요성을 지적하였으며, Park & Yim (1998)은 “가능한 한 용어로부터 정의를 유추할 수 있는 수학적 용어로 바꾸는 것이 바람직하다”고 언급하였다(p. 583). 본고는 교과서와 교사용 지도서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현의 불명료함과 비일관성을 지적하고 이로 인하여 발생하는 교사 인식을 조사하였다. 매개변수 관련 연구 또한 용어의 정의, 변수 개념의 이해와 인식 정도, 매개변수의 활용 등 교수·학습 측면에서 다양하게 이루어져 왔다. 그러나 매개변수 관련 수학 용어의 불명료함으로 인하여 구체적으로 교사들이 어떠한 오개념을 가지고 있는지에 대한 연구는 다소 미흡한 실정이다.

본 연구는 2015 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education, 2015b) 선택 중심 교육과정 <미적분>에서 처음으로 도입되고 있는 ‘매개변수’ 용어 사용에 초점을 두어 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현의 불명료성이 교사들에게 미치는 영향을 조사하기 위하여 8종(전종)의 <미적분> 교과서와 교사용 지도서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현을 분석하고 이에 대한 교사의 인식을 조사하였다. 교과용도서에 수록된 수학 용어에 대한 본 연구 결과를 토대로 하나의 불명료한 수학 용어가 수학 교수·학습에 얼마나 큰 영향을 미칠 수 있는지를 확인할 수 있었으며 본 연구 결과는 차기 교육과정 개정 시 교과서 집필에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것이다.

II. 이론적 배경

1. 매개변수

매개변수 관련 국내의 선행연구(Allen, 2006; Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003; Jee & Yoo, 2014a; Kim, 2004; Kim & Park, 2002; Martinez & Castro Superfine, 2012; Oh et al., 1998; Ursini & Trigueros, 2004)에 의하면 매개변수의 역할을 크게 두 가지로 정의하고 있다. 첫째는 방정식(예: $ax+b=0$ 에서 a, b)과 함수(예: $(f(x)=px+q$ 에서 p, q) 등의 모임을 일반화하는 수단으로 사용되는 경우이며, 둘째는 곡선(예: $x=\theta-\sin \theta, y=1-\cos \theta$ 에서 θ)이나 곡면(예: $x=\sin u \cos v, y=\sin u \sin v, z=\cos u+\log(\tan \frac{u}{2})$ 에서 u, v) 등을 나타내기 위한 수단으로 사용되는 경우이다. 전자의 매개변수는 정적인 성격이 강한 형식화된 변수의 측면이라 할 수 있으며, 후자의 매개변수는 변화하는 현상을 나타내는 변수의 동적인 측면이 강하다 할 수 있다(Kim & Park, 2002).

전자의 매개변수는 변수 및 미지수의 개념 사이의 유사성 차이에 대한 애매함과 문자 기호의 어려움을 동반하는 매우 어려운 개념이다(Furinghetti & Paola, 1994; Bardini et al., 2005). 심지어 대학에 입학한 학생들 대상의 매개변수에 대한 연구(Bloedy-Vinner, 1994)에서 많은 학생들이 매개변수와 미지수 또는 변수의 구분을 이해하지 못하는 것으로 나타났다.

Jee & Yoo (2014b)는 “우리나라 교육과정에서는 일반화 수단으로서의 매개변수를 ‘상수(常數, constant)’라는 용어와 그 용어로부터 수반되는 의미로 지도되고 있다”고 하였다(p. 804). 그 밖의 많은 선행연구(Kim, 1997, 2004; Woo, 1999)에서도 우리나라 수학과 교육과정에서 매개변수에 대한 문자 기호를 ‘상수’로 대체하여 그 의미를 제한적으로 사용하고 있다고 지적하였다. 또한 Woo (1999)는 매개변수가 사용되는 수학 교수·학습 상황에서 ‘상수’를 도입하는 용어의 부적절성을 지적하며, 매개변수는 정해지지 않은 상수를 나타내는 부정소의 의미이므로 변수로 취급해야 한다고 주장하였다.

2. 매개변수 관련 교수·학습

매개변수의 개념은 함수 개념의 구체화를 촉진할 수 있으며, 매개변수의 개념을 발전시키면 기호 감각의 요소인 대수식과 표현에 대한 의미와 구조에 대한 통찰을 향상시킬 수 있다(Drijvers, 2003). Bardini et al. (2005)는 매개변수를 ‘정해지지 않는 값이나 고정된 값(a parameter is an indeterminate but fixed element of the “values taken” by the variable)’으로 정의하였다. 이처럼 의미의 모호성으로 매개변수 개념은 학생들에게 어려운 개념이다. 또한 매개변수의 개념에 대한 지도가 어려운 것은 매개변수로 사용되는 문자의 역할이 전후 맥락과 상황에 의존하고, 심지어 문자가 쓰이는 과정에도 문자의 역할이 상황에 따라 다르며 적용 과정에서 변경될 수도 있다는 사실 뿐만 아니라 역할과 역할 간의 차이점을 설명하는 데 필요한 엄청난 논리적 복잡성 때문이다(Bloedy-Vinner, 2001; Kim & Park, 2002; Usiskin, 1988).

Kim (2004)은 “매개변수 개념은 그 사용 범위를 어떻게 파악하는가에 따라 우리나라 학교수학의 내용 전개에서 상당히 포괄적으로 사용되고 있다고 파악할 수도 있고, $x=f(t), y=g(t)$ 와 같은 형식의 표현에만 사용되는 개념으로 제한하여 이해할 수도 있다”고 하였다(p. 321). 그러나 현 교육과정의 <미적분>에서 ‘매개변수’ 용어가 처음 도입되는

것을 감안하면 두 가지 정의 중 곡선(면)을 표현하기 위한 수단으로 한정하여 도입하고 있다고 보는 것이 타당할 것이다. 이와 관련하여 Kim (2004)은 우리나라 학교수학의 경우, 매개변수의 개념이 중학교 교육과정의 대수에서 주로 도입되고 있음에도 불구하고 용어에 대한 정의는 고등학교 교육과정에서 처음으로 도입되고 제한된 범위에서 다루어지고 있기 때문에 매개변수에 대한 개념 지도의 어려움이 더욱 가중되고 있다고 지적하며 ‘매개변수’ 용어에 대한 교육과정상의 재정립 필요성을 주장하였다.

2015 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education, 2015b)에서도 매개변수가 곡선(면)을 표현하기 위한 수단으로 제한하여 다루어지고 있으며, 매개변수로 표현된 곡선의 기울기, 길이 등 대수적 계산에 치중되어 매개변수로 표현된 곡선(면)의 실질적 의미를 해석하는데 다소 미흡하다(Jee & Yoo, 2014a; Kim, 2004; Lee, 2016). 직교좌표로 표시되는 도형의 방정식에서는 극히 제한된 범위에서 도형의 성질을 조사할 수 있다. 따라서 좌표의 제한에 관계없이 매개변수를 이용해서 도형을 관찰하면 훨씬 간명하고 편리하게 도형을 이해하는데 큰 자유스러움을 주게 되며, 도형 개념에 대한 논리적 사고와 다양한 해석을 가능하게 할 수 있다(Kim, 2001; Oh et al., 1998).

III. ‘매개변수로 나타낸 함수’에 대한 교육과정과 교과용도서 분석

1. ‘매개변수’와 ‘매개변수로 나타낸 함수’에 대한 정의와 교육과정 분석

2015 개정 수학과 교육과정에서 ‘매개변수’ 용어는 선택 중심 교육과정 일반 선택 과목인 <미적분>의 ‘학습 요소’에서 처음 도입되고 있다. 관련 성취기준은 ‘[12미적02-08]매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.’가 유일하며, ‘교수·학습 방법 및 유의 사항’으로는 ‘간단한 곡선을 매개변수나 음함수를 이용하여 나타내 봄으로써 매개변수로 나타낸 함수와 음함수는 곡선을 표현하는 방법의 하나임을 이해하게 한다.’와 ‘매개변수로 나타낸 함수와 음함수는 간단한 것만 다르다.’를 제시하고 있다.

Ministry of Education & KOFAC (2016)은 ‘2015 개정 수학과 교육과정 영문판 개발 연구’를 통하여 산출물로 <2015 개정 수학과 교육과정 영문판>을 발간하였으며, 이 보고서에서는 ‘성취기준 [12미적02-08]’을 ‘differentiate parametric functions’로 번역을 하고 있다. Ministry of Education (2015a)에서 발간한 ‘2015 개정 교육과정에 따른 교과용도서 개발을 위한 편수자료 III’에도 매개변수와 관련하여 매개변수를 포함하여 다음과 같이 3가지가 제시되어 있다.

- 매개변수: parameter
- 매개변수방정식: parametric equation/parameter equation
- 매개변수(로 나타내어진) 함수: parametric function/parametrized function

편수 자료는 교과용도서를 편찬하고 사용하는 과정에 참여하는 구성원이 알아야 할 구체적인 사안을 설명하는 안내서와 같은 기능을 하며, 교과용도서에서 사용되어야 하는 정확한 용어의 제시, 교과용도서 관련 각종 제도에 대한 안내가 편수 자료의 주요한 기능이다(Ministry of Education, 2015a). 교육과정과 편수자료 등에 명시된 ‘매개변수로 나타낸 함수(parametric function)’ 표현으로 인하여 교과서를 비롯한 많은 교과용도서가 상기 표현을 인용하고 있다.

매개변수의 사전적 의미를 살펴보면 다음과 같다. 국립국어원의 표준국어대사전에는 “두 개 이상의 변수 사이의

함수 관계를 간접적으로 표시할 때 사용하는 변수¹⁾”라 하고 있으며, Park (2010)은 “변수 x, y 의 함수 관계가 변수 t 를 매개로 하여 $x=f(t), y=g(t)$ 로 나타내어지면 이 변수가 매개변수이다. 매개변수는 parameter를 번역한 것으로 한자로는 媒介變數라고 쓴다”라고 기술하고 있다(p. 66). 두산백과³⁾에서는 매개변수를 ‘몇 개의 변수 사이에 함수 관계를 정하기 위해서 사용되는 또 다른 하나의 변수’라 정의하며 다음과 같이 설명하고 있다.

파라미터 또는 보조변수(補助變數)라고도 한다. 즉, $x=f(t), y=g(t)$ 가 모두 t 의 같은 변역에서의 함수이면, t 의 어떤 값에 대하여 정해지는 x 의 값에, 같은 t 의 값에 대하여 정해지는 y 의 값을 대응시키면, x 에서 y 로의 대응이 정해져서 y 는 x 의 함수로 생각할 수 있다. 이와 같은 경우, 실제로는 $x=f(t), y=g(t)$ 에서 t 를 소거한 식을 만들면 되며, t 를 매개로 하여 x 와 y 의 함수 관계가 정해진다. 이 t 를 매개변수라고 한다. 기하학적으로는 t 의 값에 따라 점 (x, y) 가 정해지므로, 일반적으로 점 (x, y) 는 한 곡선을 그리게 된다.

위키백과⁴⁾에서는 매개변수의 정의와 함께 매개변수의 ‘학교 수학에서의 사용법’을 다음과 같이 기술하고 있다.

첫째, 일반식에서 값이 방정식족, 함수족에 포함된 원소를 결정하는 사용법. 예를 들어 $ax+b=0$, $y=ax+b$ 에서 문자 a, b 가 매개변수에 해당한다. 변수 a, b 에 수를 대입함에 따라 특정한 방정식(또는 함수)들이 만들어진다. a, b 의 값에 따라, 즉 a, b 를 매개로 하여 x 의 값이나 x, y 사이의 관계가 결정된다는 의미이다. 대한민국 교과과정에서는 ‘상수’라고 표현하기도 한다(중략).

둘째, 곡선이나 곡면을 세 삼의 변수를 이용해 표현하는 문자의 사용법. 예를 들어 $x=t+1, y=t^2$ 에서 문자 t 가 매개변수에 해당한다. 변수 t 의 값은 곡선이나 곡면 위에 있는 특정한 점들을 결정한다. 변수 t 를 소거하면 x, y 사이의 관계식을 하나 만들 수 있다. 대한민국의 교과과정에서는 위의 두 가지 개념 중 두 번째 개념으로 고등학교 수학의 미분법에 등장한다.

Korean Mathematical Society (2006)에서 발간한 표준 수학용어집에서는 ‘parametric function’을 ‘모수함수’로 번역을 하고 있으며, 수학용어사전(Lee, 2013)에서는 ‘parametric equation (매개변수 방정식)’을 다음과 같이 정의하고 있다.

If f and g are continuous functions of t on the interval I , then the set of ordered pairs (x, y) such that $x=f(t)$ and $y=g(t)$ is a plane curve. The equations $x=f(t)$ and $y=g(t)$ are parametric equations for the curve. The variable t is the parameter (p.295).

매개변수 t 로 표현된 $x=f(t), y=g(t)$ 에서 x 와 y 가 t 에 대한 함수라는 것에는 동의가 되지만, 다수의 문헌과 매체에 언급된 ‘ x 와 y 사이의 함수 관계’에 대한 표현은 재고가 필요해 보인다.

다시 말해 매개변수 t 로 표현된 $x=f(t), y=g(t)$ 에 대하여 x 와 y 사이에 함수 관계가 성립되지 않는 경우가 존재하고,

1) 국립국어원 표준국어대사전(<https://stdict.korean.go.kr>), 검색 일시: 2021.10.12.

2) 원문에서는 ‘ $x=f(t), y=f(t)$ ’로 기술되어 있음.

3) 두산백과(<https://www.doopedia.co.kr>), 검색 일시: 2021.10.12.

4) 위키백과(<https://ko.wikipedia.org>), 검색 일시: 2021.10.12.

이를 3차원으로 확장하여 $z=h(t)$ 가 추가될 경우 더욱 불합리한 표현이라 할 수 있다. 따라서 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 보다는 ‘매개변수 방정식에 의하여 정의된 곡선(면)’ 또는 ‘매개변수로 나타낸 곡선(면)’과 같이 서술하는 것이 보다 타당할 것이다.

2. ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에 대한 교과용도서 분석

1) ‘매개변수로 나타낸 함수’에 대한 교과서 표현

2015 개정 수학과 교육과정에서 <미적분>의 ‘핵심 개념’은 ‘수열의 극한’, ‘미분법’, ‘적분법’으로 구성되어 있으며, 2015 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 8종의 <미적분> 교과서 중 7종은 ‘핵심 개념’과 대단원명이 일치한다⁵⁾. 세부적으로 ‘매개변수’가 다루어지는 하위 영역을 살펴보면 ‘미분법’에서는 ‘매개변수로 나타낸 함수의 미분법’과 ‘평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도’에서, ‘적분법’에서는 ‘속도와 거리’와 ‘곡선의 길이’에서 다루어지고 있다.

‘미분법’의 ‘매개변수로 나타낸 함수의 미분법’에서는 Table 1과 같이 $\frac{dy}{dx}$ 를 정의함에 있어서 8종 모두 명시적으로 ‘매개변수’ 용어를 사용하여 정의하고 있었으나, Table 2와 같이 ‘평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도’ 영역에서는 3종(B, C, F)만이 ‘매개변수’ 용어를 사용하여 설명하고 있다.

Table 1 The selection of terminology for ‘the function represented by a parameter’ in differentiation rules

내용 영역 \ 출판사	A	B	C	D	E	F	G	H
매개변수로 나타낸 함수의 미분법	함수	함수	함수	함수	함수	함수	함수 곡선	함수
평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도	×	함수	함수	×	×	함수	×	×

Table 2 Whether to use parameters related to velocity and acceleration of a moving point on a plane

매개변수 용어를 사용한 경우	매개변수 용어를 사용하지 않은 경우
<p>좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시작 t에서의 위치를 좌표 (x, y)로 나타내면 x, y는 시간 t를 매개변수로 하는 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 와 같이 나타낼 수 있다.</p> <p>이때 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 하면 점 Q는 x축 위에서 $x=f(t)$로 나타내어지는 직선 운동을 하고, 점 R는 y축 위에서 $y=g(t)$로 나타내어지는 직선 운동을 한다.</p> <p>따라서 시작 t에서의 점 Q의 속도를 v_x, 점 R의 속도를 v_y라고 하면</p> $v_x = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = g'(t)$ <p>Park et al. (2019), p. 113</p>	<p>이제 도함수를 이용하여 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 알아보자.</p> <p>좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시작 t에서의 위치를 (x, y)라고 하면 x, y는 t의 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타낼 수 있다.</p> <p>이때 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q, y축에 내린 수선의 발을 R라고 하자. 그러면 점 P가 움직일 때 점 Q는 x축 위에서 $x=f(t)$로 주어지는 직선 운동을 하고, 점 R는 y축 위에서 $y=g(t)$로 주어지는 직선 운동을 한다.</p> <p>따라서 시작 t에서 두 점 Q, R의 속도는 각각</p> $\frac{dx}{dt} = f'(t), \quad \frac{dy}{dt} = g'(t)$ <p>Kwon et al. (2019), p. 125</p>

5) Lew et al. (2019)은 ‘핵심 개념’과 동일하게 대단원을 구성한 나머지 7종의 교과서와 달리 대단원을 ‘수열의 극한’, ‘여러 가지 함수의 미분’, ‘여러 가지 미분법’, ‘여러 가지 적분법’으로 구성하고 있다.

또한 G 교과서의 경우 Figure 1과 같이 ‘매개변수로 나타낸 함수’의 미분법 관련 문제 상황에서 ‘매개변수로 나타낸 함수’와 ‘매개변수로 나타낸 곡선’을 혼용하여 사용하고 있었다.

Figure 1 The case of using ‘the function represented by a parameter’ and ‘the curve represented by a parameter’ mixed included in textbook

<p>매개변수로 나타낸 함수의 미분법</p> <p>두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$이면</p> $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$		<p>Lew et al. (2019), p. 109 p. 111</p>
<p>3</p> <p>매개변수로 나타낸 함수 $\begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = 3 \cos t \end{cases}$에 대하여 $t = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.</p>	<p>4</p> <p>매개변수로 나타낸 곡선 $\begin{cases} x = t^2 + t + 2 \\ y = -3t^2 + at \end{cases}$에 대하여 $t=1$에 대응하는 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.</p>	

Figure 1의 문항3에 주어진 매개변수로 나타낸 함수 $\begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = 3 \cos t \end{cases}$ 에서 $x=f(t)$ 와 $y=g(t)$ 는 각각 함수이지만, Figure 2와 같이 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 를 정리하여 x 와 y 의 관계식으로 나타내면 타원 $9x^2 + 2y^2 + 6xy = 9$ 가 됨을 알 수 있다. 다시 말해, x 와 y 는 범위(정의역, 공역)가 설정되어 있지 않기 때문에 x 와 y 사이에 함수 관계가 성립하지 않는다.

Figure 2 The graph of problem 3 in Figure 1

Figure 1의 문항3과 같이 x 와 y 사이의 함수 관계가 성립하지 않는 형태의 동형 문항의 예제는 Table 3과 같이 8종의 모든 교과서에서 다루어지고 있다.

Table 3 Examples where the functional relationship between x and y does not hold

문제 3 매개변수로 나타낸 다음 함수에서 $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오.

(1) $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 7t - 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

Kwon et al. (2019), p. 94

문제 1 매개변수 t 로 나타낸 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

(1) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t^2 + 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t-1}{1+t^2} \end{cases}$

Park et al. (2019), p. 93

문제 2 다음 매개변수로 나타낸 함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

(1) $x = 3t + 2, y = t^3$

(2) $x = t^2 - 5t, y = t^3$

(3) $x = 3 + 2 \cos t, y = 5 - 2 \sin t$

(4) $x = \frac{1-t}{1+t}, y = \frac{1}{2+t}$

Hwang et al. (2019), p. 92

문제 01

매개변수 t 로 나타낸 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하시오.

(1) $x = -3t + 2, y = -2t^2 + 3$

(2) $x = t^2, y = t + \frac{1}{t}$

Kim et al. (2019), p. 86

‘적분법’의 ‘속도와 거리’ 영역에서는 Table 4와 같이 2종(C, H)의 교과서가 ‘매개변수로 나타낸 함수’라는 용어를 사용하여 서술하고 있었으며, 나머지 6종의 교과서는 ‘매개변수로 나타낸 함수’라는 용어를 사용하지 않고 서술하고 있었다. ‘곡선의 길이’ 영역에서는 1종(H)은 ‘매개변수로 나타낸 함수’를, 2종(A, G)은 ‘매개변수로 나타낸 곡선’을 사용하여 서술하고 있었으며(Table 5 참조), 나머지 5종의 교과서는 ‘매개변수’ 용어를 사용하지 않고 서술하고 있었다.

Table 4 The selection of terminology for ‘the function represented by a parameter’ in Integration rules

출판사 내용 영역	A	B	C	D	E	F	G	H
속도와 거리	×	×	함수	×	×	×	×	함수
곡선의 길이	곡선	×	×	×	×	×	곡선	함수

Table 5 How to define the arc length in parametric form included in textbooks

‘매개변수로 나타낸 함수’를 사용한 경우	‘매개변수로 나타낸 곡선’을 사용한 경우
<p>좌표평면 위에서 점이 움직인 거리를 이용하여 곡선의 길이를 구해 보자.</p> <p>곡선 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$)는 매개변수 t를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.</p> $x=t, y=f(t) \quad (a \leq t \leq b)$ <p>이때 이 매개변수로 나타낸 함수의 그래프의 길이는 좌표평면 위에서 점 $P(t, f(t))$가 시간 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리와 같다.</p> <p>따라서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은</p> $l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ $= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt$ $= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ <p>이다.</p> <p>Lee et al. (2019), p. 178</p>	<p>곡선의 길이</p> <p>① 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t), y=g(t)$ ($a \leq t \leq b$)의 길이 l은</p> $l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$ <p>② 곡선 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$)의 길이 l은</p> $l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ <p>Lew et al. (2019), p. 191</p>

2) ‘매개변수로 나타낸 함수’ 지도에 대한 교사용 지도서 내용

교과용도서에 관한 규정(Ministry of Education, 2017)에 의하면 <미적분> 교사용 지도서는 검정도서가 아니다. 그럼에도 불구하고 2015 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 8종의 <미적분> 교과서를 출간한 출판사는 교과서와 함께 교사용 지도서를 모두 출간하였다.

교사용 지도서에서는 ‘매개변수’ 관련하여 ‘지도의 Tip’, ‘지도 방향’, ‘지도상의 유의점’ 등을 통하여 교수·학습상의 다양한 지도 방법과 유의점을 제시하고 있다. 8종의 교사용 지도서에 수록된 내용을 ‘매개변수에서의 함수 관계’, ‘매개변수 도입’, ‘매개변수 적용’으로 나누어 정리하면 Table 6과 같다.

‘매개변수에서의 함수 관계’에 대하여 2종(A, F)의 교사용 지도서에서는 매개변수로 표현된 두 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 를 항상 x 와 y 의 관계식으로 표현할 수는 없다는 것을 언급하고 있는 반면, 3종(C, G, E)의 교사용 지도서는 y 를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있음으로 명시하고 있다. 후자의 경우는 학생들로 하여금 매개변수로 표현된 방정식에서 두 미지수(x 와 y)가 항상 함수 관계가 성립할 수 있다는 오개념을 형성할 여지가 있으므로 고려가 필요하다. 매개변수로 함수를 나타내는 방법이 유일하지 않음에 대해서는 2종(A, D)의 교사용 지도서만이 언급하고 있었으며, E 교사용 지도서는 두 매개변수 방정식을 $X(t)=(f(t), g(t))$ 의 형태로 표현하여 다가함수(multivalued function)로 정의를 하고 있었다.

‘매개변수 도입’과 관련해서는 3종(B, D, F)의 교사용 지도서에서 t 를 소거하여 x 와 y 의 관계식에서 계산한 $\frac{dy}{dx}$ 의 값과 t 를 소거하지 않고 매개변수 형태에서 계산한 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 같음을 학생들로 하여금 확인하게 함으로써 매개변수를 도입하도록 하고 있다. 4종(B, C, E, H)의 교사용 지도서는 매개변수 도입 시 간단하고 구체적인 함수를 이용하여 직관적으로 도입하여 지도하도록 하고 있으며, B와 C 교사용 지도서는 t 값에 따른 x 와 y 의 변화를 그래프로 그려 지도하도록 하고 있다.

‘매개변수 적용’과 관련해서는 7종(A, B, C, E, F, G, H)의 교사용 지도서에서 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하면 t 를 소거하여 x, y 의 관계식을 구하지 않아도 $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 수 있음을 학생들에게 인지하게 하는 것이 중요하다고 언급하고 있으며, 더 나아가 2종(B, C)의 교사용 지도서에서는 t 를 소거하지 않고 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하는 것이 더 용이한 방법임을 지도하도록 하고 있다.

Table 6 Guidelines for teaching and learning related to parameters included in high school calculus teacher's guide books

구분	내용	교사용 지도서	수록 페이지
매개변수에서의 함수 관계	매개변수로 함수를 나타내는 방법을 유일하지 않음에 주의하게 한다.	A D	131 86
	t 를 매개변수로 하는 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 를 항상 $y=h(x)$ 의 형태(x 와 y 의 관계식)로 바꿀 수 있는 것은 아니다.	A F	131 161
	x, y 가 t 에 대한 식으로 주어졌을 때, t 를 소거하여 y 를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있음을 확인하고, 이를 통해 x 와 y 사이의 함수 관계를 다른 변수 t 를 매개로 하여 나타낼 수 있음을 이해하게 한다.	C G E	159 199 121
	매개변수방정식에는 함수가 두 개 등장하는데, 이를 $X(t)=(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ 와 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 좌표평면으로 가는 함수로 이해할 수 있다.	E	121
	매개변수로 나타낸 함수의 미분은 구체적인 예시 함수를 가지고 직관적으로 다룰 수 있게 한다.	B C E	90 159 121
	매개변수로 나타낸 함수를 설명할 때에는 이미 알고 있는 간단한 함수를 이용한다. 또 싸이클로이드 곡선 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 와 같이 y 는 x 로 나타내기 복잡한 경우에는 매개변수 t 를 이용하면 간단히 나타낼 수 있음을 이해하도록 한다.	H	153
매개변수 도입	매개변수 t 의 값의 변화에 따른 x 와 y 의 값을 구한 후 그래프를 그려 보게 한다. 또 매개변수 t 를 소거하여 y 를 x 의 함수로 나타낸 후, 그래프를 그려 보게 한다.	B C	90 159
	매개변수 t 로 나타내어진 간단한 함수를 제시하고 매개변수 t 를 소거하여 $y=h(x)$ 꼴로 나타낸 후 $\frac{dy}{dx}$ 를	B D	91 86
	구한 식과 본문에 제시된 방법에 의해 x 와 y 를 각각 t 에 대해 미분한 다음 두 식을 나누어 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한 식을 비교해 보게 하여 서로 같음을 알게 한다.	F	161
	매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하면 t 를 소거하여 x, y 의 관계식을 구하지 않아도 $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 수 있다.	A B C E F G H	131 90 160 121 161 199 154
	$x=f(t), y=g(t)$ 와 같이 매개변수로 나타내어진 함수를 미분할 때, 매개변수를 소거하여 y 를 x 의 함수로 나타내기 힘든 식이 주어진 경우에는 매개변수를 소거하여 구하는 것보다 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ 를 이용하는 것이 더 간단하다는 것을 알 수 있게 한다.	B C	91 160
	$f(t) \neq 0$ 이 되는 조건을 반드시 확인하도록 한다.	B C F	91 160 161

3. ‘매개변수’ 표현 관련 외국 교과서 사례 분석

1) Calculus의 매개변수 관련 내용

대학의 미적분학 교재로 많이 사용되고 있는 <Calculus>를 살펴보면, 매개변수 관련 표현은 Table 7과 같이 평면 곡선을 표현하는 방식으로 매개변수 방정식(parametric equations)과 함께 처음 도입된다. 또한 고등학교 <미적분>

Table 7 The contents related to ‘Curves defined by parametric equations’ in Calculus

11.1 Parametrizations of Plane Curves

Parametric Equations

Figure 11.1 shows the path of a moving particle in the xy -plane. Notice that the path fails the vertical line test, so it cannot be described as the graph of a function of the variable x . However, we can sometimes describe the path by a pair of equations, $x = f(t)$ and $y = g(t)$, where f and g are continuous functions. When studying motion, t usually denotes time. Equations like these can describe more general curves than those described by a single function, and they provide not only the graph of the path traced out but also the location of the particle $(x, y) = (f(t), g(t))$ at any time t .

DEFINITION If x and y are given as functions $x = f(t)$, $y = g(t)$ over an interval I of t -values, then the set of points $(x, y) = (f(t), g(t))$ defined by these equations is a **parametric curve**. The equations are **parametric equations** for the curve.

Thomas et al. (2018), p. 649

Definition of a Plane Curve

If f and g are continuous functions of t on an interval I , then the equations

$$x = f(t) \quad \text{and} \quad y = g(t)$$

are **parametric equations** and t is the **parameter**. The set of points (x, y) obtained as t varies over the interval I is the **graph** of the parametric equations. Taken together, the parametric equations and the graph are a **plane curve**, denoted by C .

Larson & Edwards (2018), p. 700

10.1 Curves Defined by Parametric Equations

Imagine that a particle moves along the curve C shown in Figure 1. It is impossible to describe C by an equation of the form $y = f(x)$ because C fails the Vertical Line Test. But the x - and y -coordinates of the particle are functions of time t and so we can write $x = f(t)$ and $y = g(t)$. Such a pair of equations is often a convenient way of describing a curve.

FIGURE 1

Parametric Equations

Suppose that x and y are both given as functions of a third variable t , called a **parameter**, by the equations

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

which are called **parametric equations**. Each value of t determines a point (x, y) , which we can plot in a coordinate plane. As t varies, the point $(x, y) = (f(t), g(t))$ varies and traces out a curve called a **parametric curve**. The parameter t does not necessarily represent time and, in fact, we could use a letter other than t for the parameter. But in many applications of parametric curves, t does denote time and in this case we can interpret $(x, y) = (f(t), g(t))$ as the position of a moving object at time t .

Stewart et al. (2021), p. 662

교과서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타난 함수’라는 표현이 아니라, ‘평면곡선의 매개화(parametrizations of plane curves)’, ‘매개변수 방정식에 의하여 정의된 곡선(curves defined by parametric equations)’과 같이 매개변수가 곡선을 정의하는 하나의 방식에 초점을 두어 도입하고 있다.

Table 8 The methods of differentiation to ‘Curves defined by parametric equations’ in Calculus

11.2 Calculus with Parametric Curves

In this section we apply calculus to parametric curves. Specifically, we find slopes, lengths, and areas associated with parametrized curves.

Tangents and Areas

A parametrized curve $x = f(t)$ and $y = g(t)$ is **differentiable** at t if f and g are differentiable at t . At a point on a differentiable parametrized curve where y is also a differentiable function of x , the derivatives dy/dt , dx/dt , and dy/dx are related by the Chain Rule:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

If $dx/dt \neq 0$, we may divide both sides of this equation by dx/dt to solve for dy/dx .

Parametric Formula for dy/dx

If all three derivatives exist and $dx/dt \neq 0$, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad (1)$$

Thomas et al. (2018), p. 658

THEOREM 10.7 Parametric Form of the Derivative

If a smooth curve C is given by the equations

$$x = f(t) \quad \text{and} \quad y = g(t)$$

then the slope of C at (x, y) is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Larson & Edwards (2018), p. 710

10.2 Calculus with Parametric Curves

Having seen how to represent curves by parametric equations, we now apply the methods of calculus to these parametric curves. In particular, we solve problems involving tangents, areas, arc length, speed, and surface area.

Tangents

Suppose f and g are differentiable functions and we want to find the tangent line at a point on the parametric curve $x = f(t)$, $y = g(t)$, where y is also a differentiable function of x . Then the Chain Rule gives

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

If $dx/dt \neq 0$, we can solve for dy/dx :

1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{if} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Equation 1 (which you can remember by thinking of canceling the dt 's) enables us to find the slope dy/dx of the tangent to a parametric curve without having to eliminate the parameter t . We see from (1) that the curve has a horizontal tangent when $dy/dt = 0$, provided that $dx/dt \neq 0$, and it has a vertical tangent when $dx/dt = 0$, provided that $dy/dt \neq 0$. (If both $dx/dt = 0$ and $dy/dt = 0$, then we would need to use other methods to determine the slope of the tangent.) This information is useful for sketching parametric curves.

Stewart et al. (2021), p. 673

<Calculus>에서 매개변수 관련 이러한 표현은 도입에서뿐만 아니라 미적분 전반적으로 일관되게 표현하고 있다. 곡선에서의 기율기와 관련해서는 Table 8과 같이 ‘매개변수로 표현된 곡선에서의 미적분(calculus with parametric curves)’, ‘도함수의 매개변수 형태(parametric form of the derivative)’로 표현하고 있으며, 곡선의 길이와 관련해서는 Table 9와 같이 ‘매개변수로 정의된 곡선의 길이(length of a parametrically defined curve)’, ‘매개변수 형태에서의 곡선의 길이(arc length in parametric form)’와 같이 표현하고 있다.

Table 9 The arc length of ‘Curves defined by parametric equations’ in Calculus

<p>DEFINITION If a curve C is defined parametrically by $x = f(t)$ and $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, where f' and g' are continuous and not simultaneously zero on $[a, b]$, and C is traversed exactly once as t increases from $t = a$ to $t = b$, then the length of C is the definite integral</p> $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$	<p>THEOREM 10.8 Arc Length in Parametric Form If a smooth curve C is given by $x = f(t)$ and $y = g(t)$ such that C does not intersect itself on the interval $a \leq t \leq b$ (except possibly at the endpoints), then the arc length of C over the interval is given by</p> $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$
Thomas et al. (2018), p. 661	Larson & Edwards (2018), p. 713

2015 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 <미적분> 교과서에서 주로 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수(parametric function/parametrized function)’를 사용하여 정의·설명하는 <Calculus> 교재는 찾을 수 없었다.

2) 일본 교과서의 ‘매개변수로 나타낸 함수의 미분법’ 관련 내용

2015 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 <미적분> 교과서에서 주로 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수의 미분법’과 유사한 표현 사례는 Table 10과 같이 일본의 <수학Ⅲ>⁶⁾ 교과서에서 쉽게 찾을 수 있다. 그러나 설명 방식과 구성에 있어서 약간의 차이점은 존재하였다. <미적분> 교과서에서는 ‘미분법’으로 표현하고 있으나 일본의

Table 10 Expressions related to ‘the function represented by a parameter’ included in Japanese textbook (1)

<p>一般に, x の関数 y が, t を媒介変数として</p> $x = f(t), y = g(t)$ <p>で与えられているとき, y を x で微分すると, 合成関数および逆関数の微分法により</p> $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ <p>となる。</p> <p>したがって, 次の公式が成り立つ。</p> <p>媒介変数で表された関数の導関数</p> $x = f(t), y = g(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$	<p>媒介変数で表された関数の導関数</p> <p>曲線 C が媒介変数 t を用いて, $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表されているとき,</p> <p>y を x の関数と考えて, $\frac{dy}{dx}$ を求めてみよう。</p> <p>y を x で微分すると, 合成関数と逆関数の微分法 によって,</p> $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ <p>媒介変数で表された関数の導関数</p> $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$
山本 慎 外 (2018), p. 144-145	高橋陽一郎 外 (2012), p. 192

6) 일본의 대학입학시험은 국가대학입시센터에서 주관하는 센터시험과 대학에서 주관하는 대학별고사로 구분된다. 대학별고사에서 다수의 대학들이 문과와 경우는 <수학Ⅱ>와 <수학B>를, 이과와 경우는 <수학Ⅲ>과 <수학B>를 시험 범위로 택하고 있다(Chong et al., 2016).

<수학III> 교과서는 ‘매개변수로 표현된 함수의 도함수(媒介變數で表された関数の導関数)’로 도입을 하고 있다.

또한 개념 도입 방식에 있어서 <미적분> 교과서는 ‘여러 가지 미분법’⁷⁾에서 ‘함수의 몫의 미분법’, ‘합성함수의 미분법’, ‘매개변수로 나타낸 함수의 미분법’, ‘음함수와 역함수의 미분법’, ‘이계도함수’를 각각 소단원으로 구성하여 분리적으로 지도하는 반면, 일본의 <수학III> 교과서는 Table 10과 같이 ‘매개변수로 나타낸 함수의 도함수’에서 $\frac{dy}{dx}$ 설명을 위하여 ‘합성함수의 미분법(合成関数の微分法)’과 ‘역함수의 미분법(逆関数の微分法)’ 개념을 재도입하여 구성하고 있었다.

앞서 III장 2절에서 살펴본 바와 같이 <미적분> 교과서 중 일부가 ‘매개변수로 나타낸 함수’와 ‘매개변수로 나타낸 곡선’을 혼용하여 사용한 것과 같이 일본의 <수학III> 교과서 중 일부 교과서는 Table 11과 같이 ‘곡선의 매개변수 표현과 도함수(曲線の媒介變數表示と導関数)’로 정의하고 있었다.

Table 11 Expressions related to ‘the function represented by a parameter’ included in Japanese textbook (II)

<p>一般に、座標平面上の曲線Cの媒介変数表示が、媒介変数を t として与えられたとき、この媒介変数表示が x の関数 y を定めると考え、④のようして $\frac{dy}{dx}$ を求めることができる。</p> <p>曲線の媒介変数表示と導関数について、次のことが成り立つ。</p> <p>» 曲線の媒介変数表示と導関数</p> <p>$x = f(t), y = g(t)$ のとき</p> $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

大矢 雅則 外 (2018), p. 150-151

IV. ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에 대한 교사 인식 분석

1. 인식 조사를 위한 문항 설계와 구성

‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에 대한 교사 인식 조사를 위하여 2015 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 8종의 <미적분> 교과서와 교사용 지도서의 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현과 교수·학습상의 다양한 지도 방법과 유의점을 분석하고 이를 기반으로 다음 3가지에 초점을 맞추어 설문을 구성하였으며 설문 내용은 Table 12와 같다.

- ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에서 ‘함수’를 교사들은 어떻게 인식하고 있는가?
- 교과서에서 다루어지고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’의 예제들 중 상당수가 ‘ x 에서 y 로의 함수 관계’가 성립하고 있지 않음을 인식하고 있는가?
- 현 교육과정에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현의 수정이 필요하다고 생각하는가?

7) 2015 개정 수학과 교육과정에서 <미적분>의 핵심 개념은 3가지(수열의 극한, 미분법, 적분법)로 구성되어 있으며, 이에 기반하여 집필된 <미적분> 교과서 8종 중 7종의 교과서가 핵심 개념과 동일하게 대단원을 구성하고 있다. ‘미분법’의 하위 단원인 ‘여러 가지 미분법’에서 7종의 교과서가 성취기준([12미적02-06]부터 [12미적02-10]까지)과 동일하게 5개 하위 단원(함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법, 음함수와 역함수의 미분법, 이계도함수)으로 구성하고 있으며, 1종의 교과서만 ‘음함수의 미분법’과 ‘역함수의 미분법’을 분리하여 6개 하위 단원으로 구성하고 있다.

Table 12 The items for teacher perception survey on 'the function represented by a parameter'

▶ 설문1. 아래 예와 같이 교육과정과 교과서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’에서

$$\text{예1)} \begin{cases} x = t^2 \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases} \quad \text{예2)} \begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = 5 - 2\sin\theta \end{cases}$$

‘함수’가 의미하는 것은 무엇이라고 생각하십니까? (중복체크 가능)

- ☐ ① $t \rightarrow x$ & $t \rightarrow y$: 매개변수(t)에서 x 로의 함수 & 매개변수(t)에서 y 로의 함수
- ☐ ② $x \rightarrow y$: x 에서 y 로의 함수
- ☐ ③ $t \rightarrow (x, y)$: 매개변수(t)에서 좌표평면상의 (x, y) 로의 함수
- ☐ ④ 기타 :

▶ 설문2. 교과서에서 다루어지고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’의 예제들 중 아래 예와 같이 상당수 문제들이 ‘ x 에서 y 로의 함수 관계’가 성립하고 있지 않음을 인지하고 있으셨는지요?

<p>문제 3 매개변수로 나타낸 다음 함수에서 $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하시오.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(1) $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 7t - 3 \end{cases}$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(2) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$</div> </div> <p style="text-align: center;">권오남 외(2019), p. 94</p>	<p>문제 1 매개변수 t로 나타낸 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(1) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t^2 + 1 \end{cases}$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(2) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t-1}{1+t^2} \end{cases}$</div> </div> <p style="text-align: center;">박교식 외(2019), p. 93</p>	<p>문제 1 매개변수 t로 나타낸 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(1) $x = -3t + 2, y = -2t^2 + 3$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(2) $x = t^2, y = t + \frac{1}{t}$</div> </div> <p style="text-align: center;">김원경 외(2019), p. 86</p>
--	---	---

☐ ① 예

☐ ② 아니오

▶ 설문3-1. 현재 교육과정과 교과서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’의 표현을 수정하는 것이 필요하다고 생각하십니까?

- ☐ ① 기존 표현 유지함: 매개변수로 나타낸 함수
- ☐ ② 수정이 필요함: 매개변수로 나타낸 곡선
- ☐ ③ 혼용하여 사용하여도 상관없음
- ☐ ④ 기타 표현:

▶ 설문3-2. ‘설문3-1’에서 선택하신 이유를 간략하게 기술하여 주시기 바랍니다.

2. 조사 방법 및 응답자 구성

본 연구에서는 12개 시·도교육청⁸⁾ 고등학교 수학 교원 254명을 임의표집(accidental sampling)하여 설문조사를 실시하였다. 표집된 교원의 수는 전국 고등학교 재직 수학 교원 수(2021년 12월 27일 기준; 14,538명)⁹⁾의 1.75%에 해당한다. 설문조사에 대한 협조를 구한 후 2021년 11월부터 12월까지 오프라인으로 이루어졌다. 설문에 응답한 수학 교사의 세부 구성은 Table 13과 같다.

Table 13 The percentage of detailed composition of respondents

내용		세부 구성 인원 및 비율(%)										계	
성별	남					여					254 (100.0%)		
	161 (63.4%)					93 (36.6%)							
연령	20대		30대			40대			50대		254 (100.0%)		
	1 (0.4%)		83 (32.7%)			128 (50.4%)			42 (16.5%)				
고등학교 근무 경력	1~5년		6~10년		11~15년		16~20년		20년 이상		254 (100.0%)		
	30 (11.8%)		60 (23.6%)		68 (26.8%)		46 (18.1%)		50 (19.7%)				
학교 유형	일반고				자율고		특수목적고			특성화고		254 (100.0%)	
	216 (85.0%)				20 (7.9%)		17 (6.7%)			1 (0.4%)			
소속 시·도 교육청	서울	부산	대구	인천	광주	대전	경기	충남	전북	전남	경북	경남	254 (100.0%)
	27	23	16	16	8	11	39	8	37	12	13	44	
	(10.6%)	(9.1%)	(6.3%)	(6.3%)	(3.1%)	(4.3%)	(15.3%)	(3.1%)	(14.6%)	(4.7%)	(4.1%)	(17.3%)	

3. 설문 결과 분석

<미적분> 교과서에서 ‘매개변수로 나타난 함수’ 표현에서 ‘함수’가 의미하는 바에 대하여 명확히 정의하고 있지는 않다. 그러나 III장에서 살펴본 바와 같이 교사용 지도서에서는 ‘함수’의 의미에 대하여 다음과 같이 다양한 방식으로 도입을 하고 있다.

- ① 매개변수로 함수를 나타내는 방법이 유일하지 않음에 주의하게 한다(Kwon et al., 2020, p. 131).
- ② 매개변수는 몇 개의 변수 사이의 함수 관계를 정하기 위하여 사용되는 또 하나의 변수이다. 예를 들어 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 에서 t 를 소거한 식을 만들면 t 를 매개로 하여 x 와 y 의 함수 관계가 정해짐을 알게 한다(Hwang et al., 2021, p. 159).
- ③ 매개변수 방정식에는 함수가 두 개 등장하는데, 이를 $X(t)=(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ 와 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 좌표평면으로 가는 함수로 이해할 수 있다(Ko et al., 2019b, p. 121).

①에서 매개변수로 함수를 나타내는 방법이 유일하지 않다는 것은 x 와 y 를 매개변수(t)를 이용하여 다양하게 표현할 수 있다는 것을 의미한다. 여기서 함수의 의미는 ‘ $t \rightarrow x$ & $t \rightarrow y$ ’를 의미한다고 할 수 있다. ②에서는 학생들로 하여

8) 서울, 부산, 대구, 인천, 광주, 대전, 경기, 충남, 전북, 전남, 경북, 경남

9) 출처: 학교교육통계연보(교육부·한국교육개발원, 2021), 한국교육개발원 교육통계서비스(<https://kess.kedi.re.kr>) (일반고: 11,777명, 자율고: 962명, 특성화고: 1,188명, 특수목적고: 611명)

금 t 를 소거하면 x 와 y 의 함수 관계가 정해짐을 알게 하도록 하고 있다. 여기서 함수의 의미는 ' $x \rightarrow y$ '를 의미하고 있다. ③에서는 t 에서 좌표평면으로 가는 다가함수를 의미한다. 여기서 함수의 의미는 ' $t \rightarrow (x, y)$ '를 의미하고 있다.

설문1에서는 '매개변수로 나타낸 함수'에서 '함수'의 의미를 어떻게 생각하는지에 대하여 위 3가지 함수들 중 무엇을 의미하는지 중복을 허용하여 답하도록 하였고 교사들은 Table 14와 같이 '함수'의 의미를 다양하게 인식하고 있었다.

Table 14 Teacher's response to question 1 (I)

교사의 인식	그룹 1	그룹 2	그룹 3	그룹 4	그룹 5	그룹 6	그룹 7	계
	$t \rightarrow x \text{ \& } t \rightarrow y$	$x \rightarrow y$	$t \rightarrow (x, y)$	$t \rightarrow x \text{ \& } t \rightarrow y$ $x \rightarrow y$	$x \rightarrow y$ $t \rightarrow (x, y)$	$t \rightarrow x \text{ \& } t \rightarrow y$ $t \rightarrow (x, y)$	$t \rightarrow x \text{ \& } t \rightarrow y$ $x \rightarrow y$ $t \rightarrow (x, y)$	
인원 (비율)	48 (19.0%)	44 (17.4%)	71 (28.1%)	9 (3.6%)	16 (6.3%)	53 (20.9%)	12 (4.7%)	253 (100.0%)

'매개변수(t)에서 좌표평면의 한 점과 대응되는 함수'로 인식하는 비율이 28.1% (71명)로 가장 높게 나타났으며, '매개변수(t)에서 각각의 x, y 로 대응되는 함수'와 ' x 에서 y 로의 함수'로 동시에 인식하는 비율이 3.6% (9명)로 가장 낮게 나타났다. 응답 결과를 다시 3가지 함수의 형태로 분류하여 정리하면 Table 15와 같다. '매개변수(t)에서 좌표평면의 한 점과 대응되는 함수'로 인식하는 비율이 60.1% (152명)로 가장 높게 나타났다.

Table 15 Teacher's response to question 1 (II)

교사의 인식	그룹 1, 4, 6, 7	그룹 2, 4, 5, 7	그룹 3, 5, 6, 7
	$t \rightarrow x \text{ \& } t \rightarrow y$	$x \rightarrow y$	$t \rightarrow (x, y)$
인원(비율)	122 (48.2%)	81 (32.0%)	152 (60.1%)

2015 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education, 2015b)의 '교수·학습 방법 및 유의 사항'에는 '간단한 곡선을 매개변수나 음함수를 이용하여 나타내 봄으로써 매개변수로 나타낸 함수와 음함수는 곡선을 표현하는 방법의 하나임을 이해하게 한다.'라고 명시하고 있다(p. 87). 이를 확장하여 매개변수를 이용하여 좌표공간에서 곡선(곡면)을 표현한다면 ' $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ ($x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$, $z=h(u, v)$)'와 같이 표현되므로 '매개변수(t)에서 좌표평면의 한 점과 대응되는 함수'로 인식하는 것이 가장 타당할 것이다. 또한 ' x 에서 y 로의 함수'는 2차원 좌표평면에서만 한정적으로 적용될 수 있는 개념이다.

설문2에서는 교과서에서 다루어지고 있는 '매개변수로 나타낸 함수'의 예제들 중 상당수 예제들이 ' x 에서 y 로의 함수 관계'가 성립하고 있지 않음을 인식하고 있는지에 대하여 설문하였고 응답 결과는 Table 16과 같다.

Table 16 Teacher's response to question 2(I)

교사의 인식	예	아니오	계
인원(비율)	139 (54.7%)	115 (45.3%)	254 (100.0%)

전체 응답 교사 중 45.3% (115명)가 이를 인지하지 못하고 있는 것으로 나타났다. 세부적으로 ‘매개변수로 나타낸 함수’에서 ‘함수’의 의미를 ‘ x 에서 y 로의 함수’로 인식한 ‘그룹 2, 4, 5, 7’로 한정하여 재분류하면 Table 17과 같다.

Table 17 Teacher's response to question 2 (II)

교사의 인식	그룹 2		그룹 4		그룹 5		그룹 7		계	
	예	아니오	예	아니오	예	아니오	예	아니오	예	아니오
인원(비율)	15 (34.1%)	29 (65.9%)	4 (44.4%)	5 (55.6%)	9 (56.2%)	7 (43.8%)	6 (50.0%)	6 (50.0%)	34 (42.0%)	47 (58.0%)

‘아니오’라고 응답한 비율이 58.0%로 전체 비율 45.3% 보다 높게 나타났다. 특히 ‘매개변수로 나타낸 함수’에서 ‘함수’의 의미를 ‘ x 에서 y 로의 함수’로만 인식하고 있는 그룹 2에서는 ‘아니오’의 응답 비율이 65.9%로 교과서에서 다루어지고 있는 예제들 중 ‘ x 에서 y 로의 함수 관계’가 성립하지 않는 예제들에 대하여 인식하지 못하고 있는 비율이 가장 높게 나타났다. ‘매개변수로 나타낸 함수’에서 ‘함수’의 의미를 ‘ x 에서 y 로의 함수’로 인식하는 교사들 중 ‘ x 에서 y 로의 함수 관계’가 성립하지 않는 예제에 대하여 인식하지 못할 경우, 교수·학습 상황에서 ‘교수·학습 방법 및 유의 사항’에 명시된 것처럼 학생들에게 ‘매개변수로 나타낸 함수’가 곡선을 표현하는 방법의 하나임을 이해하게 하기 보다는 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하는 대수적 계산에 치중할 우려가 있을 뿐만 아니라 학생들에게 ‘매개변수로 나타낸 함수’에 대한 오개념을 생성하게 할 가능성이 존재한다.

설문3-1에서는 현재 교육과정과 교과서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’의 표현을 수정하는 것이 필요하다고 생각하는지에 대하여 설문을 하고, 설문3-2에서는 그렇게 생각하는 이유에 대하여 간략하게 서술을 요청하였다. 설문3-1에 대한 응답 결과는 Table 18과 같다.

Table 18 Teacher's response to question 3-1

교사의 인식	기존 표현 유지함 (매개변수로 나타낸 함수)	수정이 필요함 (매개변수로 나타낸 곡선)	혼용하여 사용하더라도 상관없음	기타	계
인원(비율)	29 (11.4%)	190 (74.8%)	31 (12.2%)	4 (1.6%)	254 (100.0%)

전체 응답자 중 74.8% (190명)가 표현의 수정이 필요하다고 응답하였으며, 기타 응답에서는 ‘매개변수 방정식으로 정의된 곡선’, ‘교과서에서 매개변수(t)에서 좌표평면상의 (x,y) 로의 함수임을 명시하여 함수임을 설명할 것’ 등이 있었다. 설문3-1과 같이 생각하는 이유를 다양하게 기술하였고 대표적인 내용을 정리하면 Table 19와 같다. ‘기존 표현 유지함’에 대한 이유로는 “수정할 경우 학생들에게 혼란이 야기될 수 있음”, “표현을 바꾸는 것보다 x 에서 y 로의 함수 관계에 성립하는 곡선만 다루어 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현을 유지하는 것이 적절함”, “학생의 입장에서 이해가 쉬움” 등이 있었으며, ‘수정이 필요함’에 대한 이유로는 “함수라고 하면 무조건 x 와 y 가 서로 수식으로 연결되어야 한다는 오개념이 생길 수 있음”, “매개변수와 관계는 함수이지만 x 에서 y 로 가는 함수는 아니기 때문에 ‘매개변수로 나타낸 곡선’이라는 표현이 합당함”, “다가함수도 함수이므로 ‘함수’라는 표현이 틀린 것은 아니나 고등학교 교육과정에서는 1가함수만을 함수로 정의하고 있음. 학생들의 혼동을 피하고 일관성을 유지하기 위해서 ‘매개변수로 나타낸 곡선’이라는 표현이 적절함” 등이 있었다.

Table 19 Teacher's response to question 3-2

기존 표현 유지함 (매개변수로 나타낸 함수)	수정이 필요함 (매개변수로 나타낸 곡선)	혼용하여 사용하여도 상관없음
<ul style="list-style-type: none"> 수정할 경우 학생들의 혼란이 야기되며 다양한 수학적 개념이 추가로 필요하여 학습량이 부담 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$... 각각의 차원에서는 함수의 정의 만족함. 이를 n차원상에 표현할 때 물체의 운동(곡선의 모양)이 표현됨을 인지시켜주면 될 것 같음 학생의 입장에서 이해가 쉬움 t에 대해서 한 점이 결정되는 특이한 형태의 함수(치역이 좌표가 되는)라고 가르치고 있고 그렇게 되면 함수의 정의에 맞는 것이라 생각됨. 학생들이 함수와 곡선을 구별하여 이해하는 경우가 많지 않고, 함수에서 배우는 적분을 사용하여 접선의 기울기나 곡선의 길이를 계산하기 때문에 함수라고 표현하는 것이 학생들의 혼동을 줄일 수 있을 것이라 생각되기 때문에 표현을 바꾸는 것보다 x에서 y로의 함수 관계에 성립하는 곡선만 다루어 '매개변수로 나타낸 함수' 표현을 유지하는 것이 적절해 보입니다. 학교수학에서는 t의 범위를 조절해서 $x \rightarrow y$로의 함수가 성립하는 예만 사용하도록 하는 것을 추천함 함수를 지도하고자 한다면 함수 표현 중 하나로 x에서 y로의 함수 관계도 성립하게끔 하면 되지 않을까 함 	<ul style="list-style-type: none"> 함수라고 하면 무조건 x와 y가 서로 수식으로 연결되어야 한다는 오개념이 생길 수 있기 때문에 예. '매개변수로 나타낸 함수'라는 표현에서 '함수'가 마치 x에서 y로의 함수 관계를 나타내는 것으로 오해할 여지가 있으므로 '매개변수로 나타낸 곡선'으로 표현하는 것이 바람직할 것 같습니다. 매개변수와와의 관계는 함수이지만 x에서 y로 가는 함수는 아니기 때문에 '매개변수로 나타낸 곡선'이라는 표현이 합당하다고 생각함. 함수가 아니고 곡선(도형)으로 표현하는 것이 대수학과 연계성이 있음 교과서에서 다루어지고 있는 매개변수로 나타낸 함수의 예제들 중 x에서 y로의 함수 관계가 성립하지 않는 경우가 많으므로 매개변수로 나타낸 곡선으로 표현을 수정하는 것이 필요함. 곡선과 함수의 그래프 올바른 이해 매개변수(t)에서 좌표평면 상의 (x, y)로의 함수 개념 지도 필요 다가함수도 함수이므로 '함수'라는 표현이 틀린 것은 아니나 고등학교 교육과정에서는 1가함수만을 함수로 정의하고 있음. 학생들의 혼동을 피하고 일관성을 유지하기 위해서 '매개변수로 나타낸 곡선'이라는 표현이 적절해 보임. 학생들이 기본적으로 생각하는 함수의 개념은 $x \rightarrow y$의 대응관계이므로 오개념을 갖게 될 우려가 있다. 매개변수(t)에서 x 또는 y로의 함수가 맞지만 x와 y사이의 관계를 표현하였을 때 함수가 되지 않을 수도 있으므로 이를 포함한 곡선의 표현이 맞는 표현이라 생각함 상위 학문(미적분학, 미분기하학)에서도 매개변수를 활용한 곡선(curve)으로 표현을 사용하고 있기 때문에 수학에서 정확한 표현이 주는 개념이미지 형성이 중요하다고 생각됨 	<ul style="list-style-type: none"> $x \rightarrow y$로의 함수가 아님을 이해시키기 매개변수로 나타낸 함수의 설명은 이미 알고 있는 간단한 함수를 이용하여 지도하라고 한다. 이를 벗어나는 부분에서의 수정은 이루어져야 하겠지만 내용 자체가 사라지기에는 무리가 있어 보인다. 관심에 따라 다르고 여러 관점을 지도하는 것이 바람직하다고 생각함. 매개변수로 나타낸 곡선은 x에서 y로의 함수 관계인지 아닌지에 초점이 있는 것이 아니라, 미분가능한 함수 $x=f(t)$와 $y=g(t)$ 각각에 관심이 있는 것이므로 크게 중요하지 않다고 생각함 미분을 적용하기 위해 직관적으로 연결시키기 위해 함수라는 용어를 쓰는 것이 좋으나, 엄밀하게는 함수가 아니므로 곡선에 대한 언급이 필요하고, 교과서에서도 관련 안내가 필요하다고 생각함 x에서 y로의 함수로 혼동할 여지가 있으나 개념을 학습하고 문제를 해결하는데 큰 지장이 없음 반드시 x에서 y로의 함수만을 "함수"로 지칭하는 것은 아니기 때문에 매개변수로 나타낸 곡선을 함수로 표현할 수 있으므로 혼용하여 사용하여도 상관없다고 생각함 학생들의 수준에 맞추어 그때 그때 수업의 수준을 변경하고 있음 두 개념을 모두 학습할 필요가 있으며 수학(고1) 과정에서 혼용하여 사용하고 있음

V. 결론 및 제언

수학에서 많은 수학 개념들이 수학 용어로부터 출발하며, 수학적 개념에 대한 정신적 표상 또는 심상은 이해 보다 선행한다(Ben-Her, 2006). 즉 수학 용어는 수학적 개념 이해의 시작점이라 할 수 있으며 수학 용어를 통하여 학습자

는 개념에 대한 표상(심상) 구축이 시작된다. 따라서 수학 교수·학습 상황에서 사용되는 수학 용어의 명료성과 일관성은 수학 교수·학습에 있어 매우 중요한 요소 중의 하나라 할 수 있다.

본고는 2015 개정 수학과 교육과정 선택 중심 교육과정 일반 선택 <미적분>에서 처음으로 도입되고 있는 ‘매개변수’ 용어에 초점을 두어 교과서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현의 불명료함과 비일관성을 지적하고 이로 인하여 발생하는 교사 인식을 조사하였다. 교과서 및 교사용 지도서 분석과 교사 인식 조사 분석 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 우리나라 교육과정과 교과서에서 사용되고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현과 유사한 표현을 일본의 <수학III> 교과서에서 확인할 수 있었다. 그러나 이러한 표현은 대학의 미적분학 교재로 사용되고 있는 <Calculus>의 정의 방식(매개변수 방정식에 의하여 정의된 곡선: curves defined by parametric equations, 평면곡선의 매개화: parametrizations of plane curves)과 상이하다. 또한 일부 교과서는 ‘매개변수로 나타낸 함수’와 ‘매개변수로 나타낸 곡선’을 혼용하여 사용하고 있었다. 교사 인식 조사 결과 아직까지는 qwerty효과¹⁰⁾가 발생하여 용어의 표현이 굳어진 상태라기 보다는 과도기적 상황으로 판단된다.

둘째, <미적분> 교과서에서 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에서 ‘함수’가 의미하는 바를 구체적으로 정의하고 있지 않을 뿐만 아니라 교사용 지도서에서도 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에서 ‘함수’의 의미를 다양하게 정의하고 있었다. 이로 인하여 많은 교사들이 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에서 ‘함수’가 의미하는 바를 다양한 방식으로 해석하고 있었다. 설문 응답 교사 중 32.0% (81명)가 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에서 ‘함수’가 의미를 ‘ x 에서 y 로의 함수’로 인식하고 있었다. 이러한 인식을 가진 교사는 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 관련 교수·학습 상황에서 대수적 계산에 치중할 우려가 있을 뿐만 아니라 학생들에게 ‘매개변수로 나타낸 함수’에 대한 오개념을 생성할 가능성이 존재한다.

셋째, 교과서에서 다루어지고 있는 ‘매개변수로 나타낸 함수’의 예제들 중 상당수 문제들이 ‘ x 에서 y 로의 함수 관계’가 성립하고 있지 않음을 인지하지 못하고 있는 교사의 비율이 45.3% (115명)로 나타났다. 심지어 ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에서 ‘함수’가 의미하는 바를 ‘ x 에서 y 로의 함수’로 인식하는 교사 중에는 58.0% (47명)가 이를 인지하지 못하고 있는 것으로 나타났다.

넷째, ‘매개변수로 나타낸 함수’ 표현에 대하여 74.8% (190명)가 ‘매개변수로 나타낸 곡선’ 또는 ‘매개변수 방정식으로 정의된 곡선’과 같은 표현으로 수정이 필요하다고 생각하고 있었다. 수정의 이유에 대해서는 ‘학생들이 함수에 대한 오개념을 생성할 수 있음’, ‘좌표공간에서의 곡선(면)과 같은 대학수학과의 연계 측면에서 수정이 필요함’, ‘고등학교 교육과정에서 다가함수를 다루는 것이 어려움’ 등을 언급하였다.

Ministry of Education & KICE (2016)가 제시한 교과서 검정기준에 의하면 ‘내용의 공정성과 정확성’과 관련하여 가장 먼저 제시된 것이 ‘수학적 개념, 원리, 법칙, 용어, 기호 등은 정확하게 기술하였는가?’이다(p. 199). 수학은 다른 어떤 학문보다도 용어의 명료성과 일관성이 매우 중요하다. 물론 수학이 오랜 세월을 거쳐 인간의 사고를 담아 형성되어 왔기 때문에 그 과정에서 개념에 대한 정의와 용어의 사용에 일관성이 유지되지 못하는 경우가 발생되기도 한다(Yim et al., 2002). 명료성과 일관성의 결여 수준에 따라 우리의 대처는 달라져야 할 것이다. 예를 들어 영어권에서 사면체와 정육면체에 해당하는 수학 용어 tetrahedron, regular hexahedron 보다 pyramid, cube의 사용을 더 선

10) qwerty 효과: 특정 제도가 불합리한 면이 있더라도 널리 퍼져 있어 바꾸기 어려운 현상을 선점(qwerty) 효과라고 한다. 초기의 타자기 자판은 특별히 이유 없이 qwerty의 순서로 자모를 배열했다. 이후 인체 공학 이론에서 불합리함을 지적했지만, 이미 사용자들에게 익숙해진 자판은 바꾸기 어렵다는 데서 qwerty 효과라는 이름이 유래했다(Park, 2021, pp. 248-249).

호한다. 이처럼 사회적 합의에 의한 용인 수준이라면 우리는 관대하게 받아들일 수 있다. 그러나 본고에서 언급한 ‘매개 변수로 나타난 함수’ 표현은 명료성과 일관성 측면 모두에서 재고가 필요하다. 교사의 인식 조사 결과에 살펴본 바와 같이 ‘매개변수로 나타난 함수’에서 ‘함수’의 의미가 매우 다양하게 해석되고 있었다. 또한 고등학교 교육과정에서는 매개변수로 두 개의 미지수까지만 표현하고 있다. 다시 말해 평면상의 곡선까지만 매개변수로 표현을 하고 있다. 수학은 연계성과 위계성이 무엇보다도 중요한 학문이다. 대학수학에서 3차원까지 확장하여 곡선(면)을 표현하는 것을 고려한다면 ‘매개변수로 나타난 함수’ 보다는 ‘매개변수로 나타난 곡선(면)’과 같은 표현이 보다 타당할 것이다.

교과서 및 교사용 지도서가 수학 용어에 대하여 명료성과 일관성을 갖추기 못할 경우 교사는 수학적 개념에 대하여 부정확한 개념을 생성할 수 있으며 이는 학생들에게 직간접적인 영향을 미칠 수 있다. ‘매개변수로 나타난 함수’ 표현과 같이 명료성과 일관성이 결여된 수학 용어에 대하여 재고가 필요한 시점이다. 또한 ‘매개변수로 나타난 함수’에 대한 학생들의 인식과 오개념 관련 연구가 추가적으로 이루어질 필요가 있다.

CONFLICTS OF INTEREST

No potential conflict of interest relevant to this article was reported.

REFERENCES

- Allen, K. S. (2006). *Students' participation in a differential equations class: Parametric reasoning to understand system*. Doctoral dissertation of Purdue university, West Lafayette, Indiana.
- Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. *Proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol 2, 129-136. University of Melbourne, Australia.
- Ben-Hur, M. (2006). *Concept-rich mathematics instruction: Building a strong foundation for reasoning and problem solving*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Bloody-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking-The case of parameter. In J. P. Da Ponte & J. F. Matos (eds.). *Proceedings of the eighteenth international conference for the psychology of mathematics education*, Vol. 2. University of Lisbon. Lisbon-Portugal, pp. 88-95.
- Bloody-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chong, Y. O., Chang, K. Y., Kim, G., Kwon, N. Y., Kim, J. H., Seo, D. Y., Kang, H. Y., Park, S., Ko, H. K., Nam, J. Y., & Tak, B. (2016). A comparative study of mathematics curriculum among the United States, Singapore, England, Japan, Australia and Korea. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 26(3), 371-402.
- 정영옥, 장경윤, 김구연, 권나영, 김진호, 서동엽, 강현영, 박선화, 고호경, 남진영, 탁병주(2016). 수학 교육과정 국제 비교 분석 연구 -미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주의 중학교와 고등학교 교육과정을 중심으로-. *수학교육학연구*, 26(3), 371-402.
- Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Doctoral Dissertation of Utrecht University, Netherlands.
- Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference?. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 368-375). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.
- Han, D. H. (1998). A study on the problem of terminology in calculus. *The Journal of Educational Research in Mathematics*,

- 8(2), 495-507.
 한대희(1998). 미분법 단원에서 용어의 문제. *수학교육학연구*, 8(2), 495-507.
- Hong, S. B. et al. (2019). *High school calculus*. Seoul: Jihaksa.
 홍성복 외 10명(2019). *고등학교 미적분*. 서울: ㈜지학사.
- Hong, S. B. et al. (2020). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: Jihaksa.
 홍성복 외 10명(2020). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: ㈜지학사.
- Hwang, S. W. et al. (2019). *High school calculus*. Seoul: MiraeN.
 황선옥 외 8명(2019). *고등학교 미적분*. 서울: ㈜미래엔.
- Hwang, S. W. et al. (2021). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: MiraeN.
 황선옥 외 8명(2021). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: ㈜미래엔.
- Jee, Y. M., & Yoo, Y. J. (2014a). Case study on meaningful use of parameter: One classroom of third grade in middle school. *School Mathematics*, 16(2), 355-386.
 지영명, 유연주(2014a). 매개변수개념의 의미충실한 사용에 관한 사례연구: 중학교 3학년 한 교실을 대상으로. *학교수학*, 16(2), 355-386.
- Jee, Y. M., & Yoo, Y. J. (2014b). A comparison of pre-service teachers' and students' understanding of the concept of parameters as means of generalization. *School Mathematics*, 16(4), 803-825.
 지영명, 유연주(2014b). 일반화 수단으로서 매개변수의 인식과 오류에 대한 연구: 중학교 2학년 학생들과 예비교사들의 인식과 오류를 중심으로. *학교수학*, 16(4), 803-825.
- Kim, H. S. (2001). The visualization of figures represented by parameters. *The Mathematical Education*, 40(2), 317-333.
 김향숙(2001). 매개변수로 표현되는 도형의 시각화 방안. *수학교육*, 40(2), 317-333.
- Kim, N. H. (1997). A study of the notion of variable and the understanding of algebraic expressions. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 1(1), 93-105.
 김남희(1997). 변수 개념과 대수식의 이해에 관한 연구. *수학교육학연구*, 1(1), 93-105.
- Kim, N. H. (2004). A study on the teaching-learning of parameter concept. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 14(3), 305-325.
 김남희(2004). 매개변수 개념의 교수-학습에 관한 연구. *수학교육학연구*, 14(3), 305-325.
- Kim, S. J., & Park, S. Y. (2002). Study on the teaching of parameter in the school mathematics. *School Mathematics*, 4(3), 495-511.
 김성준, 박선용(2002). 학교수학에서의 매개변수의 역할 고찰. *학교수학*, 4(3), 495-511.
- Kim, W. K. et al. (2019). *High school calculus*. Seoul: Visang Education.
 김원경 외 14명(2019). *고등학교 미적분*. 서울: ㈜비상교육.
- Kim, W. K. et al. (2020). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: Visang Education.
 김원경 외 14명(2020). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: ㈜비상교육.
- Kim, Y. S., & Park, K. S. (1994). A Reexamination of school mathematics terminologies in Korea. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 4(2), 1-10.
 김연식, 박교식(1994). 우리나라의 학교 수학 용어의 재검토. *수학교육학연구*, 4(2), 1-10.
- Ko, S. E. et al. (2019a). *High school calculus*. Seoul: Sinsago.
 고성은 외 5명(2019a). *고등학교 미적분*. 서울: ㈜좋은책신사고.
- Ko, S. E. et al. (2019b). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: Sinsago.
 고성은 외 5명(2019b). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: ㈜좋은책신사고.
- Korean Mathematical Society (2006). *Standard mathematics glossary*. Gyeonggi: CheongmoonGak.
 대한수학회(2006). *표준 수학용어집*. 경기: 청문각.
- Kwon, O. N. et al. (2019). *High school calculus*. Seoul: Kohaksa.

- 권오남 외 14명(2019). *고등학교 미적분*. 서울: (주)교학사.
- Kwon, O. N. et al. (2020). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: Kohaksa.
- 권오남 외 14명(2020). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: (주)교학사.
- Larson, R., & Edwards, B. (2018). *Calculus* (11th Ed). Boston, MA: Cengage Learning.
- Lee, E. S. (2013). *Mathematics dictionary*. Seoul: Nexusbook.
- 이은승(2013). *수학용어사전*. 서울: 넥서스.
- Lee, J. S. (2016). *A comparing and analysis of understanding the high school students for the parameters and textbook*. Master's thesis of Kongju national university.
- 이진성(2016). *매개변수에 대한 고등학생의 이해 정도와 교과서별 비교 분석*. 공주대학교 석사학위논문.
- Lee, J. Y. et al. (2019). *High school calculus*. Seoul: Chunjae Education.
- 이준열 외 7명(2019). *고등학교 미적분*. 서울: (주)천재교육.
- Lee, J. Y. et al. (2020). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: Chunjae Education.
- 이준열 외 7명(2020). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: (주)천재교육.
- Lew, H. C. et al. (2019). *High school calculus*. Seoul: Chunjae Textbook.
- 류희찬 외 9명(2019). *고등학교 미적분*. 서울: (주)천재교과서.
- Lew, H. C. et al. (2021). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: Chunjae Textbook.
- 류희찬 외 9명(2021). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: (주)천재교과서.
- Martinez, M. V., & Castro Superfine, A. (2012). Integrating algebra and proof in high school: Students' work with multiple variables and a single parameter in a proof context. *Mathematical thinking and learning*, 14(2), 120-148.
- Ministry of Education (2015a). *Editing material III for the development of curriculum books according to the 2015 revised curriculum*. Sejong: Author
- 교육부(2015a). 2015 개정 교육과정에 따른 교과용도서 개발을 위한 편수자료 III. 세종: 저자.
- Ministry of Education (2015b). *Mathematics curriculum*. Bulletin of MOE No.2015-74 [Seperate Volume #8].
- 교육부(2015b). *수학과 교육과정*. 교육부 고시 제2015-74호 [별책8].
- Ministry of Education (2017). *Revision for the classification of middle · high school textbooks*. Bulletin of MOE No.2017-123.
- 교육부(2017). *중 · 고등학교 교과용도서 구분 재수정*. 교육부 고시 제2017-123호.
- Ministry of Education, Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity (2016). *Mathematics Curriculum - Republic of Korea* -. Seoul: KOFAC.
- 교육부, 한국과학창의재단(2016). 2015 개정 수학과 교육과정 영문판. 서울: 한국과학창의재단.
- Ministry of Education, Korea Institute for Curriculum and Evaluation (2016). *Points to note in the compilation and test standards for the development of textbooks according to the 2015 revised curriculum*. Seoul: Author.
- 교육부, 한국교육과정평가원(2016). 2015 개정 교육과정에 따른 교과용도서 개발을 위한 편찬상의 유의점 및 검정기준. 서울: 저자.
- Nam, S. I. (2011). An analysis on the actual conditions of the mathematical misconceptions held by the gifted education learners. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 15(1), 179-198.
- 남승인(2011). 수학교육대안 대상자의 수학교육에 대한 오개념 실태 조사. *한국초등수학교육학회지*, 15(1), 179-198.
- Oh, S. C., Ki, U. H., Kim, Y. H., & Oh, C. H. (1998). A study on figures represented by parameters. *Journal of Science Education*, 22, 25-50.
- 오세춘, 기우항, 김영호, 오철한(1998). 媒介變數로 표시되는 圖形의 연구. *과학교육연구지*, 22, 25-50.
- Park, K. M. (2021). *Mathematics concert plus*. Seoul: Dongasiabook
- 박경미(2021). *수학콘서트 플러스*. 서울: 도서출판 동아시아.
- Park, K. M., & Yim, J. H. (1998). A semantic of investigation of geometric terminology in school mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 8(2), 565-586.
- 박경미, 임재훈(1998). 학교 수학 기하 용어의 의미론적 탐색 -기하 용어의 역사적 변천 및 국제 비교를 중심으로-. *수학교육학연구*,

8(2), 565-586.

- Park, K. S. (2003). A semantic investigation on high school mathematics terms in Korea -centered on terms of Chinese characters. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 13(3), 227-246.
- 박교식(2003). 고등학교 수학 용어에 대한 의미론적 탐색: 한자 용어를 중심으로. *수학교육학연구*, 13(3), 227-246.
- Park, K. S. (2010). *Revisiting mathematics terminology: Series 4*. Gyeonggi-do: Mathlove.
- 박교식(2010). *수학용어 다시보기: 시리즈4*. 경기도: 수학사랑.
- Park, K. S. (2013). An analysis and criticism on mathematics terminologies used in elementary school mathematics: Focused on some examples. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 17(1), 1-17.
- 박교식(2013). 우리나라 초등학교 수학용어의 분석과 비판: 몇 가지 예를 중심으로. *한국초등수학교육학회지*, 17(1), 1-17.
- Park, K. S. et al. (2019). *High school calculus*. Seoul: Donga Publisher.
- 박교식 외 19명(2019). *고등학교 미적분*. 서울: ㈜동아출판.
- Park, K. S. et al. (2020). *High school calculus teacher's guide book*. Seoul: Donga Publisher.
- 박교식 외 19명(2020). *고등학교 미적분 교사용 지도서*. 서울: ㈜동아출판.
- Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S. (2021). *Calculus: Early transcendentals* (9th Ed). Boston, MA: Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Hass, J., Heil, C., & Weir, M. D. (2018). *Thomas' Calculus* (14th Ed). Boston, MA: Pearson Education.
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra?. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4, 361-368, Bergen, Norway.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vinner, S. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. 65-81. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Woo, J. H. (1999). *Educational Foundations of School Mathematics*. Seoul: Snupress.
- 우정호(1999). *학교수학의 교육적 기초*. 서울: 서울대학교 출판부.
- Yang, S. H. (2017). A view on the diversity of the word and mathematical notation expression used in high school mathematics textbooks. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 20(3), 211-237.
- 양성현(2017). 고등학교 수학 교과서에서 사용되는 어휘(語彙)와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 소고(小考). *한국학교수학회논문집*, 20(3), 211-237.
- Yang, S. H. (2019). A survey of high school students' ideas for the local extrema. *School Mathematics*, 21(1), 155-172.
- 양성현(2019). ‘극대와 극소’의 정의에 대한 고등학교 학생의 인식 조사. *학교수학*, 21(1), 155-172.
- Yang, S. H. (2021). A view on guidelines for teaching and learning of quadratic curves in mathematics curriculum and the construction of textbooks and teacher's guide books. *School Mathematics*, 23(3), 521-545.
- 양성현(2021). 교육과정의 이차곡선 교수·학습 유의 사항과 교과서 및 교사용 지도서 구성에 대한 소고(小考). *학교수학*, 23(3), 521-545.
- Yim, J. H., Lee, K. H., & Park, K. M. (2002). A comparative study of South and North Korea on mathematics textbook and the development of unified mathematics curriculum for South and North Korea (I). *Journal of Educational Research in Mathematics*, 12(4), 493-508.
- 임재훈, 이경화, 박경미(2002). 남북한 수학 교과서 영역별 분석 및 표준 수학 교육과정안 개발 연구(I). *수학교육학연구*, 12(4), 493-508.
- 高橋陽一郎 外 33名 (2012). *數學III*. 大阪: 新興出版社啓林館.
- 大矢 雅則 外 16名 (2018). *新編 數學III*. 東京: 數研出版株式會社.
- 山本 慎 外 10名 (2018). *最新 數學III*. 東京: 數研出版株式會社.